Mémoire de Master 2

Louis-Clément LEFÈVRE
Directeur : Philippe EYSSIDIEUX

Soutenu le mercredi 18 juin 2014

Variété des représentations du groupe fondamental d'une variété algébrique lisse complexe

Table des matières

1 Introduction

Dans ce mémoire nous nous intéressons aux groupes fondamentaux des variétés kählériennes compactes et des variétés algébriques lisses complexes. Il est connu que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'une variété différentiable compacte de dimension 4 et il n'est pas difficile de montrer qu'on peut aussi réaliser tout groupe de présentation finie comme le groupe fondamental d'une variété algébrique complexe, affine ou projective, non irréductible. Par contre dans le cas des variétés algébriques complexes lisses, ou dans le cas des variétés kählériennes compactes, il existe des restrictions. Le *problème de Serre*, encore largement ouvert, consiste à déterminer ces restrictions.

Nous n'avons pas pour but d'étudier en détail toutes les restrictions connues. L'objectif principal est l'étude de l'article de Kapovich-Millson [KM98] qui présente une méthode issue de la théorie de Hodge mixte. Cet article lui-même est le prolongement de celui de Goldman-Millson [GM88] qui ne s'intéresse qu'au cas des variétés kählériennes compactes, donc à la théorie de Hodge pure.

Précisons tout de suite quelques conventions. Le terme *variété algébrique* désigne les points sur $\mathbb{C}$ d'un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$. Nous ne confondrons jamais un schéma X sur un corps k et ses points sur k qu'on note $X(k)$. En particulier un groupe algébrique G est un schéma et la variété des représentations d'un groupe de type fini $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ aussi.

Les théorèmes que l'on souhaite expliquer sont :

Théorème 1.0.1 (Goldman, Millson). *Soit X une variété kählérienne compacte, $\Gamma = \pi_1(X, x)$ son groupe fondamental. Soit G un groupe algébrique affine sur $\mathbb{R}$ et $\rho : \Gamma \to G(\mathbb{R})$ une représentation dont l'image est contenue dans un sous-groupe compact de $G(\mathbb{R})$. Alors le germe analytique de ρ dans la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est un cône quadratique.*

Théorème 1.0.2 (Kapovich, Millson). *Soit X une variété algébrique complexe lisse, $\Gamma = \pi_1(X, x)$ son groupe fondamental. Soit G un groupe algébrique affine réductif sur $\mathbb{R}$ et $\rho : \Gamma \to G(\mathbb{R})$ une représentation d'image finie. Alors le germe analytique de ρ dans la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est quasi-homogène avec des générateurs de poids $1, 2$ et des relations de poids $2, 3, 4$. Comme corollaire il existe une infinité de groupes d'Artin qui ne sont pas isomorphes à des groupes fondamentaux de variétés algébriques lisses complexes.*

Pour cela nous aurons de nombreuses notions à introduire au fur et à mesure. Les représentations du groupe fondamental s'interpètent de plusieurs façons : d'une part en topologie algébrique par la notion de monodromie et par la cohomologie des groupes, d'autre part en géométrie algébrique par la notion de variété des représentations. La théorie de Goldman-Millson développe pour chacune de ces interpétations une théorie des déformations puis étudie le lien entre elles, et conclut dans le cadre des variétés kählériennes compactes. La théorie de Kapovich-Millson utilise les mêmes idées dans le cadre de la théorie de Hodge mixte.

2 Préliminaires de topologie algébrique

La première section présente des outils de topologie algébrique dont nous nous servirons sans cesse et de cohomologie des groupes.

2.1 Systèmes locaux

Commençons par la topologie algébrique. Les références sont les livres de Hatcher [Hat01] et Bott-Tu [BT82]. La notion de système local et de monodromie est très bien expliquée dans Szamuely [Sza09].

Soit X un espace topologique, G un groupe abélien.

Définition 2.1.1. Un *faisceau localement constant de groupes*, de fibre G, est un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur X tel que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x sur lequel $\mathcal{F}_{|U}$ est isomorphe au faisceau constant associé à G.

Les morphismes de restriction $\mathcal{F}_{|U} \to \mathcal{F}_{|V}$ (pour $V \subset U$) sont alors dans $\mathrm{Aut}(G)$ et les fibres $\mathcal{F}_x$ sont des groupes isomorphes à G.

Définition 2.1.2. Un *fibré plat de groupes*, de fibre G, est un fibré topologique $p : E \to X$ de fibre G muni de la topologie discrète et de groupe de structure $\mathrm{Aut}(G)$ aussi muni de la topologie discrète.

Autrement dit pout tout ouvert $U \subset X$ assez petit, $p^{-1}(U) \simeq U \times G$ et sur deux tels ouverts U, V la fonction de transition $(U \cap V) \times G \to (U \cap V) \times G$ est de la forme $(x, g) \mapsto (x, \varphi(g))$ où φ est une fonction localement constante $U \cap V \to \mathrm{Aut}(G)$ appelée *cocycle*. Là aussi les fibres de E sont des groupes abéliens isomorphes à G.

Théorème 2.1.3. *La donnée d'un faisceau localement constant $\mathcal{F}$ est équivalente à la donnée d'un fibré plat E comme ci-dessus.*

Démonstration. Concrètement les deux sont équivalents à la donnée d'un recouvrement ouvert (U_i) de X, d'un élément g_i de G sur chaque ouvert U_i et d'un cocycle $\varphi_{ij} \in \mathrm{Aut}(G)$ pour chaque intersection non vide $U_i \cap U_j$, vérifiant la relation de transition $g_i = \varphi_{ij} g_j$. Le fibré plat E est construit à partir des φ_{ij} vues comme fonctions continues sur $U_i \cap U_j$ à valeur dans $\mathrm{Aut}(G)$ et le faisceau $\mathcal{F}$ est celui des sections de E. □

Définition 2.1.4. Une telle donnée est appelée un *système local de groupes* sur X de fibre G.

Monodromie Supposons maintenant que X soit un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. C'est le cas des variétés topologiques ou des CW-complexes ; ce sont les hypothèses minimales pour s'assurer que X admet un revêtement universel $\widetilde{X}$. Soit $x \in X$ un point base, $\pi_1(X, x)$ le groupe fondamental. Adoptons le point de vue d'un fibré plat $p : E \to X$, on note E_x la fibre en x.

Choisissons un point $\tilde{x} \in E_x$. Comme dans le cas des revêtements, tout lacet $\gamma : [0, 1] \to X$ tel que $\gamma(0) = x$ se relève en un lacet $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to E$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ et si γ, γ' sont deux lacets homotopes sur X alors l'homotopie se relève à $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$. Ceci permet de définir une aplication

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x) \times E_x &\longrightarrow E_x \\ (\gamma, \tilde{x}) &\longmapsto \tilde{\gamma}(1), \text{où } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{x} \end{aligned}$$

mais cette fois chaque lacet γ agit comme un automorphisme de E_x pour sa structure de groupe. La donnée qu'on obtient est alors celle d'une *action à gauche* de $\pi_1(X, x)$ (i.e. on compose les chemins comme des fonctions) sur le groupe abélien G.

Définition 2.1.5. Cette application est appelée *action de monodromie* de $\pi_1(X, x)$ sur la fibre E_x.

Remarquons aussi que si x, y sont deux points de X alors les fibres E_x, E_y sont isomorphes et les actions de $\pi_1(X, x), \pi_1(X, y)$ sont conjuguées ; l'isomorphisme s'obtient en relevant un chemin de x à y.

Rappelons que le groupe $\pi_1(X, x)$ agit naturellement *à droite* sur le revêtement universel $(\widetilde{X}, \tilde{x})$. Une façon de le voir est de construire $(\widetilde{X}, \tilde{x})$ comme l'ensemble des classes d'homotopie à extrêmités fixées de lacets $\gamma : [0, 1] \to X$ tels que $\gamma(0) = x$; $\tilde{x}$ correspond au lacet constant en x et la projection $\pi : (\widetilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ est $\gamma \mapsto \gamma(1)$. Alors $\pi_1(X, x)$ agit à droite par pré-compostion.

Théorème 2.1.6 (Monodromie)**.** *La donnée d'une action de $\pi_1(X, x)$ sur un groupe abélien G est équivalente à la donnée d'un système local de groupes de fibre G sur X.*

Démonstration. D'abord on démontre qu'un système local sur un espace simplement connexe est constant. Le système local E sur X se tire en arrière à $\widetilde{X}$ et le système local obtenu est isomorphe à $\widetilde{X} \times G$. Puis on montre que E est isomorphe au quotient de $\widetilde{X} \times G$ par la relation $(\tilde{x}.\gamma, g) \sim (\tilde{x}, \gamma.g)$. □

Remarque 2.1.7. Le même principe est valable avec d'autres structures algébriques que celle des groupes abéliens, sur lesquelles on peut parler d'action de $\pi_1(X, x)$ qui préserve la structure.

- Pour la structure d'ensemble, la monodromie est simplement une action de groupe sur un ensemble et la théorie obtenue est exactement celle de la classification des revêtements de (X, x).
- Pour la structure d'espace vectoriel (réel, de dimension m), un fibré plat E n'est pas la même chose qu'un fibré vectoriel car les topologies sur la fibre et sur $GL(m, \mathbb{R})$ sont discrètes et les fonctions de transition sont localement constantes. Le théorème de monodromie dit qu'un système local d'espaces vectoriels est la même chose qu'une action de $\pi_1(X, x)$ sur $\mathbb{R}^m$ c'est à dire une représentation linéaire de $\pi_1(X, x)$ dans $GL(m, \mathbb{R})$.
- Voir 2.1.9 pour le cas des algèbres de Lie.

Fibrés vectoriels et connexions Supposons maintenant que X soit une variété différentiable, soit $\mathcal{A}_X^k$ son faisceau de formes différentielles de degré k, soit un système local d'espaces vectoriels de dimension m donné par un fibré plat $p : E \to X$. Les cocycles de E étant localement constants, E est en particulier un fibré $\mathcal{C}^\infty$. A partir de E on construit un fibré vectoriel F avec les mêmes cocycles, mais dont les sections ne sont plus localement constantes : sur un ouvert U où $p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^m$ ce sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ $f : U \to p^{-1}(U)$ (pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^m$) telles que $p \circ f = \mathrm{id}_U$.

On peut introduire le faisceau des formes différentielles à valeur dans F de degré k noté $\mathcal{A}_X^k(F) := \mathcal{A}_X^k \otimes F$ et le munir d'une connexion $\nabla : \mathcal{A}_X^k(F) \to \mathcal{A}_X^{k+1}(F)$ donnée en coordonnées locales par

$$\nabla(\sum \alpha_i \otimes f_i) = \sum d\alpha_i \otimes f_i$$

où d est la dérivée extérieure des formes différentielles. Cette définition ne dépend pas des coordonnées sur F car les transitions sont localement constantes.

La connexion obtenue a la propriété d'être *plate* c'est à dire $\nabla \circ \nabla = 0$ et les sections s de E sont *parallèles* c'est à dire $\nabla(s) = 0$.

Théorème 2.1.8. *La donnée d'un fibré plat E d'espaces vectoriels est équivalente à la donnée d'un fibré vectoriel F muni d'une connexion ∇ plate.*

Démonstration. Sur F l'ensemble des sections s telles que $\nabla(s) = 0$ forme un système local ([Voi02, proposition 9.11]). □

Le complexe des sections globales $(\mathcal{A}^*(X, F), \nabla)$ muni de la connexion plate forme le *complexe de De Rham* à valeur dans F. Le théorème est valable aussi dans le cas des fibrés vectoriels complexes sur une variété différentiable réelle, et dans le cas des fibrés holomorphes pour une variété complexe. Dans ce dernier cas on obtient le *complexe de De Rham holomorphe* $(\Omega^*(X, F), \nabla)$ à valeur dans F (où Ω_X désigne le faisceau des formes différentielles holomorphes sur X) et la connexion ∇ est holomorphe.

Exemple 2.1.9. Étudions la structure de système local d'algèbres de Lie, qui sera bien utile par la suite. Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On sait que G agit sur $\mathfrak{g}$ via la représentation adjointe Ad. Supposons qu'on se donne un morphisme $\rho : \pi_1(X, x) \to G$, par exemple une repésentation linéaire de $\pi_1(X, x)$ dans $GL(m, \mathbb{R})$. Alors la composition $\mathrm{Ad} \circ \rho$ est une action une action de $\pi_1(X, x)$ sur $\mathfrak{g}$ pour la structure d'algèbre de Lie et donc, par le théorème de monodromie 2.1.6, donne lieu à un système local d'algèbres de Lie et un fibré vectoriel noté $\mathrm{Ad}(\rho)$ avec sa connexion plate ∇. Alors le complexe de De Rham $(\mathcal{A}^*(X, \mathrm{Ad}(\rho)), \nabla)$ de formes différentielles à valeur dans $\mathrm{Ad}(\rho)$ a la structure d'une *algèbre de Lie différentielle graduée* (qui sera étudiée en détail dans la section 5.5) : le crochet de Lie de deux formes différentielles est défini par

$$[\alpha \otimes u, \beta \otimes v] = (\alpha \wedge \beta) \otimes [u, v]$$

où localement α, β sont des formes différentielles et u, v des sections du fibré plat $\mathrm{Ad}(\rho)$.

2.2 Cohomologie des groupes

Une théorie bien suffisante de la cohomologie des groupes basée sur les foncteurs dérivés se trouve dans Godement [God58]. On trouve d'autres précisions dans [Bro82]. Le principal résultat dont nous aurons besoin est la proposition 2.2.6.

On fixe un groupe G.

Définition 2.2.1. On appelle G-module la donnée d'un groupe abélien M sur lequel G agit en préservant la structure de groupe abélien. C'est la même chose qu'un module sur l'anneau (non commutatif) $\mathbb{Z}[G]$.

Un morphisme de G-module est un morphisme de modules qui commute avec l'action de G. Si M est un G-module on note M^G l'ensemble des $x \in M$ tels que $\forall g \in G, g.x = x$.

Proposition 2.2.2. *L'application $M \mapsto M^G$ est un foncteur covariant exact à gauche sur la catégorie des G-modules : M^G est la même chose que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$ où $\mathbb{Z}$ est considéré comme un G-module pour l'action triviale.*

On peut alors appliquer toute la théorie des foncteurs dérivés.

Définition 2.2.3. Les groupes de cohomologie de G à valeur dans M sont définis par

$$H^n(G, M) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M).$$

Ce sont les foncteurs dérivés du foncteur $M \mapsto M^G$.

Rappelons rapidement comment ils sont construits. Pour dériver un foncteur covariant exact à gauche (comme c'est le cas en théorie des faisceaux du foncteur des sections globales) il faut choisir une résolution

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots$$

de M par des G-modules injectifs, puis appliquer le foncteur à cette suite exacte et calculer les groupes de cohomologie. Cependant comme $\mathrm{Ext}^n(-, M)$ est aussi le foncteur dérivé de $\mathrm{Hom}(-, M)$ contravariant exact à gauche, on peut calculer $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}, M)$ à partir d'une résolution

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow P^0 \longleftarrow P^1 \longleftarrow \cdots$$

de $\mathbb{Z}$ par des modules projectifs sur $\mathbb{Z}[G]$ (en particulier, par des modules libres). Puis appliquer le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}(-, M)$ et calculer les groupes de cohomologie. La théorie générale nous donne les propriétés des foncteurs dérivés.

Proposition 2.2.4. *Les groupes de cohomologie ont les propriétés suivantes :*
— *$M \mapsto H^n(G, M)$ est un foncteur covariant sur la catégorie des G-modules.*
— *La foncteur H^0 est isomorphe au foncteur $M \mapsto M^G$.*
— *Si $0 \to L \to M \to N$ est une suite exacte de G-module alors on a une suite exacte longue*

$$0 \longrightarrow L^G \longrightarrow M^G \longrightarrow N^G \longrightarrow H^1(G, L) \longrightarrow H^1(G, M) \longrightarrow H^1(G, N) \longrightarrow H^2(G, M) \longrightarrow \cdots$$

Remarque 2.2.5. En analogie avec la remarque 2.1.7 sur les systèmes locaux, on peut faire la même construction en supposant que les G-modules admettent plus de structure (par exemple celle d'espace vectoriel, ou d'algèbre de Lie) et que G agit en respectant cette structure. Alors les groupes de cohomologie ont aussi cette struture.

Résolution explicite Il reste à voir comment calculer concrètement les groupes $H^n(G, M)$, c'est à dire trouver des résolutions projectives (ou libres, ou acycliques) du G-module $\mathbb{Z}$. Ou, trouver directement un complexe $C^*(G, M)$ dont la cohomologie soit isomorphe à $H^*(G, M)$. On notera comme toujours d la différentielle, $Z^n(G, M)$ le groupe des cocycles et $B^n(G, M)$ le groupe des cobords.

Godement indique la résolution suivante dite *homogène* : en degré n le complexe $C^n(G, M)$ est formé des fonctions

$$f : G^{n+1} \to M \text{ telles que}$$
$$\forall g \in G, \quad f(g.x_0, \dots, g.x_n) = g.f(x_0, \dots, x_n)$$

et la différentielle $d : C^n(G, M) \to C^{n+1}(G, M)$ est donnée par

$$df(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1}).$$

Mais on peut simplifier ce complexe.

Introduisons la *notation barre* : on note $(y_1|\dots|y_n) := (1, y_1, y_1y_2, \dots, y_1y_2\cdots y_n)$. A cause de la propriété d'homogénéité du complexe $C^*(G, M)$ on peut toujours se ramener à écrire la suite $(x_0, \dots, x_n)$ sous une unique forme $(y_1|\dots|y_n)$ et à calculer avec la notation barre. On obtient alors un nouveau complexe dit *inhomogène* dont les éléments de degré n sont les fonctions $f : G^n \to M$ et la différentielle est

$$\begin{aligned} df(y_1|\dots|y_{n+1}) = {} & y_1.f(y_2|\dots|y_{n+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(y_1|\dots|y_{i-1}|y_iy_{i+1}|y_{i+2}|\dots|y_{n+1}) \\ & + (-1)^{n+1} f(y_1|\dots|y_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Les complexes homogènes et inhomogènes ont la même cohomologie qui est $H^*(G, M)$ car l'application qui transforme $(x_0, \dots, x_n)$ en $(y_1 | \dots | y_n)$ est une homotopie entre les deux.

Regardons les premiers termes de ce complexe. Un élément de $C^0(G, M)$ est simplement un élément x de M. Demander que $dx = 0$ signifie que x est invariant par G. On retrouve donc $H^0(G, M) = M^G$. Le résultat dont nous nous servirons est :

Proposition 2.2.6. *Le groupe $Z^1(G, M)$ est formé des fonctions $f : G \to M$ telles que*

$$\forall g, h \in G, \quad f(gh) = f(g) + g.f(h) \tag{2}$$

et le groupe $B^1(G, M)$ est formé des fonctions de la forme $f(g) = g.x - x$ pour un élément x de M.

3 Préliminaires sur les groupes de type fini

On s'intéresse à présent aux groupes de type fini, qui seront pour nous les groupes fondamentaux des espaces topologiques considérés et les groupes dont on étudiera les représentations.

Rappelons rapidement qu'un groupe Γ est dit *de type fini* s'il admet un nombre fini de générateurs. On note alors une *présentation* de Γ sous la forme

$$\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_d \mid r_q, q \in Q \rangle$$

où les γ_i sont les générateurs et les r_q les relations : on peut y penser comme des éléments du groupe libre F sur les γ_i, donc des mots, qui engendrent un sous-groupe distingué H de F tel que Γ soit le quotient F/H. Le groupe est de *présentation finie* si en plus il admet un nombre fini de relations.

Par la propriété universelle, pour définir un morphisme f d'un groupe de type fini Γ dans un groupe G il suffit de se donner les images $f(\gamma_i)$ qui doivent vérifier les relations r_q dans G.

3.1 Groupes fondamentaux et groupes kählériens

La question générale qui nous motive est celle-ci : quels groupes (abstraits) peuvent être réalisés comme des groupes fondamentaux, et de quels espaces ? Quelques théorèmes préliminaires bien connus en topologie algébrique (voir Hatcher [Hat01]) amènent rapidement la discussion vers les groupes de présentation finie. Le sujet de ce mémoire sera ensuite l'étude des variétés algébriques et kählériennes.

Tout d'abord le théorème qui justifie de s'intéresser aux groupes de présentation finie est :

Théorème 3.1.1. *Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte, ou d'un CW-complexe fini ou d'un complexe simplicial fini, est un groupe de présentation finie.*

Démonstration. D'abord toute variété topologique compacte a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini. Une preuve possible, dans le cas différentiable, passe par la théorie de Morse ([BT82, théorème 17.19]). Un complexe simplicial est un cas particulier de CW-complexe. Pour ces derniers le groupe fondamental se calcule avec le théorème de Van Kampen et ne dépend d'ailleurs que du squelette de dimension 2 ([Hat01, proposition 1.26]). □

Si on ne se limitait pas au cas des groupes de présentation finie, et qu'on ne limite pas non plus les espaces topologiques considérés, le résultat est :

Théorème 3.1.2 ([Hat01, corollaire 1.28]). *Tout groupe est le groupe fondamental d'un CW-complexe de dimension* 2.

Un groupe de présentation finie est par nature même un groupe sur lequel il est facile d'effectuer des constructions, topologiques ou algébriques : il faut s'occuper d'un nombre fini de générateurs puis d'un nombre fini de relations. Ce principe mène à de nombreux théorèmes.

Théorème 3.1.3. *Tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental*

1. *D'un CW complexe fini de dimension* 2.
2. *D'un complexe simplicial fini de dimension* 2.
3. *D'une variété algébrique affine complexe, non irréductible.*

4. D'une variété algébrique projective complexe, non irréductible.

5. D'une variété différentiable compacte de dimension 4.

Démonstration. Pour 1, on construit un CW-complexe à partir d'un bouquet de cercles, un par générateur du groupe, et les relations indiquent comment recoller des disques le long des cercles ([Hat01, corollaire 1.28]).

Comme conséquence du théorème d'approximation simpliciale ([Hat01, théorème 2C.5]) tout CW-complexe a le même type d'homotopie qu'un complexe simplicial qu'on peut prendre de même dimension et de même cardinal ce qui démontre 2.

Le point 3 s'obtient à partir d'un complexe simplicial plongé dans un espace $\mathbb{R}^n$, dont on remplace les simplexes par des sous-espaces affines puis on les étend dans $\mathbb{C}^n$.

Le point 4 s'obtient de même en remplaçant les simplexes par des sous-espaces projectifs. Remarquons que ce dernier raisonnement ne fonctionne pas si on reste dans $\mathbb{R}$ car un simplexe de dimension 1 serait remplacé par une droite projective réelle, qui est homéomorphe au cercle, alors que son complexifié est une droite projective complexe qui est simplement connexe.

Le point 5 est un théorème plus difficile que les autres. □

On s'intéresse maintenant à la classe des variétés kählériennes, et en particulier des variétés algébriques projectives. Les rappels sur la géométrie kählérienne seront faits dans la section 7. Le *problème de Serre* consiste à caractériser exactement les groupes de présentation finie pouvant être des groupes fondamentaux de variétés algébriques complexes lisses. Nous allons voir que la théorie de Hodge fournit des restrictions sur le groupe fondamental. Le but de ce mémoire n'est pas d'étudier en détail toutes les restrictions connues et on peut se référer à [ABC+96] pour une liste de résulats. Pour l'instant nous allons en étudier une seule, dont la preuve est l'occasion de revoir des arguments de topologie algébrique et de théorie de Hodge.

Théorème 3.1.4. *Si Γ est le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte X alors l'abélianisé de Γ modulo torsion est un groupe abélien libre de rang pair.*

Démonstration. D'abord dès que X est une variété (connexe), le premier groupe d'homologie $H_1(X,\mathbb{Z})$ est isomorphe à l'abélianisé du groupe fondamental $\pi_1(X)$ ([Hat01, théorème 2A.1]). Puis si X est compacte, les groupes abéliens libres $H_1(X,\mathbb{Z})/\,\text{torsion}$ et $H^1(X,\mathbb{Z})/\,\text{torsion}$ sont isomorphes ([Hat01, corollaire 3.3]). Par ailleurs $H^1(X,\mathbb{Z})/\,\text{torsion}$ est un réseau de $H^1(X,\mathbb{R})$ et son rang comme groupe abélien libre est égal à la dimension (réelle) de $H^1(X,\mathbb{R})$ qui est aussi la dimension complexe de $H^1(X,\mathbb{C})$.

Or sur une variété kählérienne compacte la décomposition de Hodge (voir la section 7)

$$H^1(X,\mathbb{C}) = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X) \quad \text{avec} \quad \overline{H^{1,0}(X)} = H^{0,1}(X)$$

implique que la dimension de $H^1(X,\mathbb{C})$ est paire. □

Définition 3.1.5. On appelle *groupes kählériens* les groupes de présentation finie isomorphes à des groupes fondamentaux de variétés kählériennes compactes.

Exemple 3.1.6. Le groupe $\mathbb{Z}^m$ n'est pas un groupe kählérien si m est impair. Si $m = 2n$ alors il est bien connu que $\mathbb{Z}^{2n}$ est le groupe fondamental du tore $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$ qui est une variété kählérienne compacte.

3.2 Groupes d'Artin, Coxeter et Shephard

Nous allons introduire trois classes de groupes qui sont au centre de l'article de Kapovich-Millson [KM98]. Mais dans l'approche de ce mémoire nous n'en aurons besoin que dans la section 8. Les groupes de Coxeter sont les plus connus et on été largement étudiés, une référence est le livre de Humphreys [Hum92].

La donnée qu'on se fixe est celle d'un graphe Λ fini, non orienté, sans boucles (arrête d'un sommet à lui même), tels que deux sommets sont connectés par au plus une arrête. Chaque arrête e porte un nombre entier $\varepsilon(e) \geq 2$ et chaque sommet v porte un nombre $\delta(v) \in \{2, \dots, \infty\}$. On note $\mathcal{V}(\Lambda)$ l'ensemble fini des sommets, $\mathcal{E}(\Lambda)$ l'ensemble fini des arrêtes, et si v, w sont deux sommets reliés par une (et au plus une) arrête celle-ci est notée $[v, w]$. On peut alors noter $\varepsilon(v, w)$ pour $\varepsilon([v, w])$.

Remarque 3.2.1. Cette donnée est relativement compliquée pour parler des groupes de Coxeter, où on pourrait se contenter de dire que ε est une fonction symétrique définie sur les couples de sommets avec $\varepsilon(v,v)=2$ et $\varepsilon(v,w)=\infty$ s'il n'y a pas d'arrête entre v et w. Mais cette donnée encode toute l'information pour construire les deux autres groupes.

Définition 3.2.2. Le *groupe de Coxeter* engendré par Λ, noté G^c_Λ, et le groupe de présentation finie

$$\langle g_v, v\in\mathcal{V}(\Lambda)\mid \forall v\in\mathcal{V}(\Lambda), (g_v)^2=1 \text{ et } \forall[v,w]\in\mathcal{E}(\Lambda), (g_vg_w)^{\varepsilon(v,w)}=1\rangle.$$

Une source importante d'exemples de groupes de Coxeter provient de la géométrie.

Exemple 3.2.3. Dans un espace euclidien E et on se donne un nombre fini d'hyperplans $H_1,\dots,H_n$. A chaque hyperplan H_i est associée une réflexion orthogonale s_i. Alors le groupe engendré par les s_i est naturellement un groupe de Coxeter : chaque réflexion est d'ordre 2 et la composée de deux réflexions $s_i\circ s_j$ est une rotation dans le plan engendré par les orthogonaux $H_i^\perp, H_j^\perp$ dont l'ordre sera un entier (ou ∞) $\varepsilon(s_i,s_j)$ symétrique en i,j. Le groupe obtenu est un sous-groupe du groupe orthogonal $O(E)$.

Nous n'aurons besoin d'aucune connaissance précise sur la géométrie de ce groupes. Remarquons que dans un groupe de Coxeter la relation sur les générateurs $(st)^{\varepsilon(s,t)}=1$ combiné au fait que $s=s^{-1}$ implique

$$(stst\dots)=(tsts\dots)$$

avec $\varepsilon(s,t)$ termes de chaque côté. Cette relation est appelée *relation d'Artin* de longueur $\varepsilon(s,t)$.

Définition 3.2.4. Le *groupe d'Artin* engendré par le graphe Λ, noté G^a_Λ, est le groupe de présentation finie

$$\langle g_v, v\in\mathcal{V}(\Lambda)\mid \forall[v,w]\in\mathcal{E}(\Lambda), (g_vg_wg_vg_w\dots)=(g_wg_vg_wg_v\dots)\rangle$$

avec la relation d'Artin de longueur $\varepsilon(g_v,g_w)$.

Remarque 3.2.5. C'est aussi une généralisation des groupes de tresses d'Artin qui admettent la présentation

$$B_n=\langle\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}\mid \forall 1\le i\le n-2, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ et } \forall|i-j|>2, \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i\rangle$$

et sont liés à la notion de tresse. On voit clairement aparaître la relation d'Artin de longueur 2 $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$ qui exprime la commutativité des générateurs, et la relation d'Artin de longueur 3 $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

Comme les relations du groupe d'Artin G^a_Λ sont vraies dans le groupe de Coxeter G^c_Λ, il y a un morphisme canonique surjectif $G^a_\Lambda\to G^c_\Lambda$.

Définition 3.2.6. Le *groupe de Shephard* engendré par le graphe Λ, noté G^s_Λ, est le groupe de présentation finie

$$\langle g_v, v\in\mathcal{V}(\Lambda)\mid \forall[v,w]\in\mathcal{E}(\Lambda), (g_vg_wg_vg_w\dots)=(g_wg_vg_wg_v\dots) \text{ et } \forall v\in\mathcal{V}(\Lambda), g_v^{\delta(v)}=1\rangle$$

avec la relation d'Artin de longueur $\varepsilon(g_v,g_w)$.

On voit que le groupe de Shephard G^s_Λ contient plus de relations que le groupe d'Artin G^a_Λ donc il existe un morphisme canonique surjectif $G^a_\Lambda\to G^s_\Lambda$. Si $\delta(v)=2$ pour tout v on retrouve exactement le groupe de Coxeter G^c_Λ.

Remarque 3.2.7. Ce morphisme est important dans l'article [KM98], dont le but est d'étuder les représentations des groupes d'Artin en passant par la théorie des représentations de G^s_Λ, puis en la tirant en arrière à G^a_Λ.

4 Préliminaires sur les groupes algébriques et représentations

Nous continuons à introduire des notions préliminaires, cette fois en géométrie algébrique. Une bonne référence pour la géométrie algébrique générale et la théorie des schémas est le livre de Qing Liu [Liu02].

4.1 Groupes algébriques

Nous n'aurons besoin que d'une théorie très limitée des groupes algébriques : concrètement les seuls groupes que nous utiliserons seront des sous-groupes de $GL(n,k)$ pour $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Mais nous aurons besoin d'utiliser leur foncteur des points sur les k-algèbres et les changements de base, c'est pourquoi il faut se placer dans le cadre de la théorie des schémas. Une bonne référence pour cette partie est le cours en ligne de Milne [Mil12] et [Mil13].

On fixe un corps k quelconque. Si X est un schéma sur k on note encore X le foncteur des points qu'il représente, défini sur la catégorie des k-algèbres notée k-**Alg** et à valeur dans la catégorie des ensembles **Set**. Ainsi

$$X(A) := \operatorname*{Hom}_{\mathrm{Spec}(k)} (\mathrm{Spec}(A), X)$$

est appelé l'ensemble des A-points de X. Les notations ne confondront jamais un schéma sur k et l'ensemble de ses k-points.

Définition 4.1.1. Un *groupe algébrique* sur k est la donnée d'un schéma G sur k tel que pour toute k-algèbre A, l'ensemble $G(A)$ soit un groupe et si $f : A \to B$ est un morphisme de k-algèbres alors $f_* : G(A) \to G(B)$ est un morphisme de groupes.

On peut aussi le définir comme un groupe dans la catégorie des schémas sur k, mais notre définition sera en fait la plus concrète et nous aurons plusieurs occasions de le voir. Elle sera abrégée en « $G(A)$ est un groupe, fonctoriellement en A » car nous n'aurons pas besoin d'être très formel.

Définition 4.1.2. Si X est un schéma sur k, on dit que G agit sur X si pour toute k-algèbre A, $G(A)$ agit sur $X(A)$, fonctoriellement en A.

Remarque 4.1.3. Attention, l'ensemble G lui-même n'a pas du tout de structure de groupe. Par contre comme $G(k)$ est un groupe il existe un élément identité e qui est un point rationnel de G.

Concrètement nous aurons seulement affaire à des schémas affines et nous nous restreindrons à cette classe là.

Définition 4.1.4. Un *groupe algébrique affine* sur k est un groupe algébrique G sur k qui est un schéma affine de type fini sur k.

On peut penser simplement à G comme une k-algèbre de type fini, donc à un quotient de $k[X_1, \dots, X_n]$ par un idéal I qui représente des équations, tel que pour toute k-algèbre A l'ensemble des solutions dans A^n des équations de I forme un groupe.

Exemple 4.1.5. L'exemple le plus important est celui du groupe linéaire $GL(n)$. Il correspond à la k-algèbre

$$\mathcal{O}(GL(n)) := k[X_{ij}][\det^{-1}]$$

où il y a une indeterminée X_{ij} pour chaque $i, j = 1, \dots, n$ et det est un polynôme en les X_{ij}. C'est aussi bien sûr la k-algèbre affine $k[X_{ij}, T]/(1 - T\det)$. Pour toute k-algèbre A les A-points forment le groupe

$$GL(n, A) := \{A \in \mathcal{M}_n(k) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Les autres exemples utiles sont $SL(n), O(n), SO(n)$, dont il est très facile d'écrire la k-algèbre, et dont les A points sont respectivement notés $SL(n,A), O(n,A), SO(n,A)$.

La théorie des groupes algébriques a des forts liens avec celle des groupes de Lie.

Théorème 4.1.6. *Si G est un groupe algébrique affine sur $k = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) alors $G(k)$ est un groupe de Lie réel (resp. complexe).*

Démonstration. L'ensemble des k-points est un ensemble algébrique affine inclus dans un k^N, avec une structure de groupe. Les points lisses de $G(k)$ forment un ouvert dense. Par homogénéité, si un point de $G(k)$ est lisse alors tous les points sont lisses. Donc $G(k)$ est une variété différentiable réelle (resp. complexe) avec une structure de groupe compatible, c'est un groupe de Lie. □

Définition 4.1.7. Un *groupe de Lie algébrique* est l'ensemble des k-points ($k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) d'un groupe algébrique affine G sur k.

En fait en pratique on utilisera une classe de groupes encore plus restreinte.

Définition 4.1.8. Un *groupe algébrique linéaire* est un sous-groupe algébrique fermé G de $GL(n)$. C'est donc un sous-schéma fermé de $GL(n)$ tel que $G(A)$ est un sous-groupe de $GL(n, A)$, fonctoriellement en A.

Algèbre de Lie On fixe un groupe algébrique affine G sur k. Comme on l'a déjà remarqué en 4.1.3 il existe un élément identité e de G qui est k-rationnel. L'espace tangent de Zariski en e noté T_eG est un espace vectoriel sur k. Mais comme dans le cas des groupes de Lie, l'espace T_eG porte une structure supplémentaire d'algèbre de Lie. Nous ne détaillons pas la construction (on renvoie à Milne [Mil13]) : dans le cas des groupes algébriques linéaires c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(k)$ et le crochet de Lie est égal au commutateur de deux matrices $[A, B] := AB - BA$.

Définition 4.1.9. L'*algèbre de Lie* de G, notée $\mathrm{Lie}(G(k))$ (voir 4.1.11 pour les notations), est le k-espace vectoriel T_eG muni du crochet de Lie $[-,-]$ qui est bilinéaire, antisymétrique et satisfait l'identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

On a alors l'*application adjointe*

$$\mathrm{ad}(X) : Y \longmapsto [X, Y]$$

qui est une dérivation de $\mathrm{Lie}(G(k))$, et l'*action ajointe* Ad de $G(k)$ sur $\mathrm{Lie}(G(k))$ par

$$\mathrm{Ad}(g) = \text{différentielle en } e \text{ de } h \mapsto ghg^{-1}$$

qui est est un morphisme $\mathrm{Ad} : G(k) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}(G(k)))$. Dans le cas où $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ alors avec ces notations $\mathrm{Lie}(G(k))$ est l'algèbre de Lie au sens de la géométrie différentielle (espace tangent en e ou bien champs de vecteurs invariants à gauche) du groupe de Lie $G(k)$.

Changement de base On souhaite une théorie qui se comporte bien par l'opération de changement de base. Si X est un schéma sur k et K une extension de corps de k on note X_K le schéma obtenu par changement de base. Un point de X sur K est la même chose qu'un point K-rationnel de X_K. Si x est un point de X sur K alors on sait que l'espace tangent T_xX est un espace vectoriel sur K. Supposons que x est un point k-rationnel. Alors x est aussi un point K-rationnel de X_K avec un espace tangent T_xX_K. Le point important est l'égalité

$$T_xX_K = T_xX \otimes_k K \tag{3}$$

que nous appelerons *changement de base pour l'espace tangent.*

Si maintenant on prend pour X un groupe algébrique affine G, on a déjà remarqué que G contient un point k-rationnel e correspondant à l'identié du groupe $G(k)$, et dont l'espace tangent est l'algèbre de Lie de G.

Proposition 4.1.10. *La formule de changement de base (3) se traduit dans le cas des algèbres de Lie par*

$$\mathrm{Lie}(G_K(K)) = \mathrm{Lie}(G(k)) \otimes_k K. \tag{4}$$

Notons simplement $\mathrm{Lie}(G(K))$ pour $\mathrm{Lie}(G_K(K))$. Alors avec ces notations, $\mathrm{Lie}(G)$ se comporte comme un foncteur des extensions de corps de k vers les algèbres de Lie et on note $\mathrm{Lie}(G(K))$ pour $\mathrm{Lie}(G)(K)$.

Remarque 4.1.11. L'intérêt de ces notations apparaîtra dans la section 5.6. Si A est une k-algèbre locale artinienne, on aura envie de considérer que $G(A)$ est le groupe des k-points d'un groupe algébrique G_A et a une algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(G) \otimes A$. Mais A n'est pas un corps et la formule (4) n'a plus de sens en remplaçant K par A.

4.2 Variété des représentations

La référence pour cette partie est de livre de Lubotzky-Magid [LM85]. On fixe un groupe Γ de type fini (a fortiori, de présentation finie) et un groupe algébrique affine G (en particulier G est un schéma affine de type fini) sur un corps k. L'objectif est de construire un schéma dont l'ensemble des k-points sera $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(k))$.

Exemple 4.2.1. Pour comprendre les idées, raisonnons d'abord en terme d'ensembles algébriques affines pour le groupe $GL(n,k) \subset \mathcal{M}_n(k)$. Fixons une présentation $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_d \mid r_q, q \in Q\rangle$. Pour définir un morphisme, il faut choisir un élément M_i de $GL(n,k)$ pour chaque générateur γ_i et pour chaque relation à respecter $r_q = \gamma_{s_1} \dots \gamma_{s_m}$ (un mot sur les générateurs) il faut que le produit de matrices $R_q = M_{s_1} \cdots M_{s_m}$ soit égal à l'identité I_n de $GL(n,k)$. Les morphismes de Γ dans $GL(n,k)$ sont donc en bijection avec les solutions dans $(GL(n,k))^d$ des équations algébriques $(R_q = I_n)_{q\in Q}$.

Mais on veut raisonner sur des schémas pour pouvoir considérer les points sur toutes les k-algèbres. Pour cela on commence par introduire le foncteur des points puis on montre qu'il est représentable.

Définition 4.2.2. Le *foncteur des représentations* est le foncteur

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\Gamma, G) : k\text{-}\mathbf{Alg} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ A &\longmapsto \mathrm{Hom}(\Gamma, G(A)) \\ (f : A \to B) &\longmapsto (f_* : \mathrm{Hom}(\Gamma, G(A)) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, G(B))) \end{aligned} \tag{5}$$

Théorème 4.2.3. *Le foncteur* $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ *est représentable par un schéma affine de type fini sur k qu'on note encore* $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ *et qu'on appelle* variété des représentations *de Γ dans G.*

Les idées de la démonstrations sont celles de l'exemple 4.2.1 mais en travaillant avec des schémas. On se restreindra au cas où G est un groupe algébrique linéaire, ce qui facilite grandement les choses car en un certain sens on sait décrire explicitement l'application induite par le produit $G \times G \to G$ sur la k-algèbre affine $\mathcal{O}(G)$.

Démonstration. On choisit une présentation $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_d \mid r_q, q \in Q\rangle$. Le groupe G est associé à une k-algèbre de type fini de la forme

$$\mathcal{O}(G) := k[X_{ij}][\det^{-1}]/I.$$

Choisir une image pour chaque générateur revient à travailler avec l'algèbre $\mathcal{O}(G)^{\otimes d}$ qu'on écrit

$$\mathcal{O}(G)^{\otimes d} = k[X_{ij}^{(s)}][(det^{(s)})^{-1}]/I^{(s)}$$

avec $s = 1, \dots, d$ correspondant à γ_s. Chaque relation à respecter $r_q = \gamma_{s_1} \dots \gamma_{s_m}$ correspond à une équation, dans le cas des produits de matrices, $M_{s_1} \cdots M_{s_m} - I_d = 0$. Cette relation, écrite dans les coordonnées X_{ij}, est elle-même composée de n^2 polynômes en les $X_{ij}^{(s)}$, qui engendrent un idéal noté R_q. On obtient alors la k-algèbre

$$R := \mathcal{O}(G)^{\otimes d}/(R_q)_{q\in Q}$$

et par construction (et analogie avec l'exemple 4.2.1) l'ensemble des A-points du schéma $\mathrm{Spec}(R)$ est exactement $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(A))$.

La construction du schéma ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix de la présentation de Γ car les schémas obtenus représentent le même foncteur, c'est le lemme de Yoneda. $\square$

Remarque 4.2.4. Avec ces choix de notations, si A est une k-algèbre on a l'égalité entre $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(A))$ (les morphismes de Γ dans $G(A)$) et $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)(A)$ (les A-points du schéma). Par contre malgré les notations il n'y a aucun morphisme du groupe Γ vers l'espace topologique du schéma G.

Terminons par deux opérations classiques sur la variété des représentations. La première servira dans la théorie des groupoïdes à classifier les déformations équivalentes des représentations.

Définition 4.2.5. L'*action par conjugaison* de G sur $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est l'action donnée par : pour toute k-algèbre A, $G(A)$ agit sur $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(A))$ par

$$(g.\rho)(\gamma) := g\rho(\gamma)g^{-1}$$

où $g \in G(A), \rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G(A)), \gamma \in \Gamma$; ceci fonctoriellement en A.

La seconde est à mettre en relation avec la remarque 3.2.7 sur le tiré en arrière d'une représentation d'un groupe de Shephard en une représentation du groupe d'Artin correspondant.

Définition 4.2.6. Tout morphisme $f : \Gamma \to \Delta$ entre groupes de type fini induit un morphisme de schémas

$$f^* : \mathrm{Hom}(\Delta, G) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$$

et pour toute k-algèbre A un morphisme

$$f^*_A : \mathrm{Hom}(\Delta, G(A)) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, G(A))$$

fonctoriel en A. C'est l'opération de *tiré en arrière par f*.

5 Théorie de la déformation

Nous allons introduire la théorie de la déformation au sens de Deligne-Goldman-Millson. La référence est l'article de Goldman-Millson [GM88], mais tout est écrit en vu d'étudier l'article de Kapovich-Millson [KM98].

Dans toute cette partie k désigne un corps de caractéristique nulle.

5.1 Algèbres locales artiniennes et algèbres locales complètes

On sait en géométrie algébrique classique que si X est un schéma sur k et $x \in X(k)$ alors les points de X sur la k-algèbre $k[t]/(t^2)$ au dessus de x forment l'espace tangent en x et on peut y penser comme les déformations au premier ordre du point x. Les déformations d'ordres supérieures seront paramétrées par les k-algèbres $k[t]/(t^{n+1})$ et plus généralement par les k-algèbre locales artiniennes. On trouve des précisions sur les anneaux artiniens dans le livre d'Atiyah-MacDonald [AM69] et une étude des foncteurs sur les anneaux artiniens dans [Sch68].

Définition 5.1.1. Une k-algèbre locale artinienne est une k-algèbre A de dimension finie sur k avec un unique idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ et telle que $A/\mathfrak{m}_A \simeq k$.

On note k-**ArtLoc** la catégorie des k-algèbres locales artiniennes. Un morphisme $f : A \to B$ est un morphisme d'algèbre qui doit envoyer l'idéal maximal de A sur celui de B. Ce sont en particuliers des anneaux locaux et la condition d'être de dimension finie sur k est équivalente à la condition d'être un anneau artinien.

Exemple 5.1.2. Les exemples les plus importants sont ceux des anneaux de polynômes tronqués $k[t]/(t^{n+1})$. On pense à $\mathrm{Spec}(k[t]/(t^{n+1}))$ comme un point épaissi à l'ordre n.

Dans une k-algèbre locale artinienne A, il y a un morphisme $i : k \to A$ qu'on appellera *inclusion* et un morphisme k-linéaire $q : A \to A/\mathfrak{m}_A \simeq k$ qu'on appelle *réduction*, avec une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_A \longrightarrow A \xrightarrow{q} k \longrightarrow 0 \tag{6}$$

qui admet une section canonique $i : k \to A$. Soit maintenant X un schéma sur k et x un point rationnel, vu comme un morphisme $x : \mathrm{Spec}(k) \to X$ au dessus de $\mathrm{Spec}(k)$ (ce qui exprime la k-linéarité). Si A est une k-algèbre locale artinienne, on note $q^* : \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(A)$.

Définition 5.1.3. Un A-point au dessus de x est un A-point $f : \mathrm{Spec}(A) \to X$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}(k) \arrow[dl, "q^*"'] \arrow[dr, "x"] & \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[rr, "f"] & & X \end{tikzcd}$$

commute au dessus de $\mathrm{Spec}(k)$. La donnée (X, x) définit un foncteur

$$\begin{aligned} k\text{-}\mathbf{ArtLoc} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ A &\longmapsto A\text{-points de } X \text{ au dessus de } x \end{aligned}$$

appelé *foncteur des points au dessus de x* ou encore *foncteur des déformations de x*.

Si par exemple X est un schéma affine représenté par une k-algèbre $k[X_1, \dots, X_n]/I$, un k-point x est une solution dans k^n des équations I. Un A-point au dessus de x est une solution dans A^n des équations I qui se réduit modulo $\mathfrak{m}_A$ à la solution x.

Exemple 5.1.4. Pour $A = k[t]/(t^2)$ les A-points au dessus de x forment l'espace tangent de Zariski en x. Les points sur $k[t]/(t^{n+1})$ sont les ***déformations de x à l'ordre n***.

Exemple 5.1.5. Soit Γ un groupe de type fini, G un groupe algébrique affine, $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ la variété des représentations. Une représentation $\rho : \Gamma \to G(k)$ est un k-point du schéma $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$. Le morphisme de réduction q induit un morphisme $q^{**} = q_* : G(A) \to G(k)$ puis un morphisme

$$q_* : \mathrm{Hom}(\Gamma, G(A)) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, G(k)).$$

Alors les A-points au dessus de ρ sont les représentations $\tilde{\rho} \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G(A))$ telles que $q_*\tilde{\rho} = \rho$. On les appelle aussi les ***A-déformations de ρ***.

Complétude Nous allons maintenant montrer que les k-algèbres locales artiniennes sont des anneaux complets pour une certaine topologie et nous allons introduire plusieurs catégories plus générales de k-algèbres locales. La motivation de départ est la proposition suivante.

Théorème 5.1.6 ([AM69, proposition 8.4])**.** *Dans une k-algèbre artinienne locale A, l'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ est nilpotent.*

La conséquence est que dans une série formelle $F \in k[[X_1, \dots, X_n]]$, on peut remplacer les X_i par des éléments fixés $x_i \in \mathfrak{m}_A$ et ceci défini bien un morphisme d'algèbres $k[[X_1, \dots, X_n]] \to A$. C'est un cas particulier de complétude.

Soit A une k-algèbre, I un idéal de A. On peut introduire une topologie sur A pour laquelle les opérations d'algèbre sont continues en demandant que la famille d'idéaux $(I^n)_{n \geq 0}$ forme une base de voisinages de 0. Bien sûr les $(x + I^n)$ seront alors une base de voisinage de x. On l'appelle *topologie I-adique*. Une *suite de Cauchy* est une suite (x_n) d'éléments de A telle que pour tout entier r il existe un rang N tel que si $p, q \geq N$ alors $x_p - x_q \in I^r$. La k-algèbre A est dite *complète* si tout suite de Cauchy converge.

De façon analogue à la construction des nombres p-adiques il est toujours possible de compléter la k-algèbre A en une k-algèbre $\widehat{A}$ par rapport à la topologie I-adique au moyen d'une limite projective

$$\widehat{A} := \varprojlim (A/I^n).$$

En particulier on s'intéresse au cas d'une k-algèbre locale A, pour laquelle les notions de complétude et de complétion seront toujours relatives à son unique idéal maximal $\mathfrak{m}_A$.

Définition 5.1.7. Une k-algèbre locale complète est une k-algèbre locale A, d'unique idéal maximal $\mathfrak{m}_A$, complète pour la topologie $\mathfrak{m}_A$-adique.

Exemple 5.1.8. L'exemple important de k-algèbre locale complète est celui des séries formelles $k[[X_1, \dots, X_n]]$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_0 = (X_1, \dots, X_n)$. Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ inclus dans l'idéal $\mathfrak{m}_0$. L'anneau localisé $(k[X_1, \dots, X_n]/I)_{(\mathfrak{m}_0)}$ est l'anneau local en 0 du schéma associé à $k[X_1, \dots, X_n]/I$. Alors l'anneau local complété est $k[[X_1, \dots, X_n]]/\widehat{I}$ où $\widehat{I}$ est l'idéal engendré par I dans $k[[X_1, \dots, X_n]]$.

Proposition 5.1.9. *Si l'idéal I est nilpotent, alors la k-algèbre A est complète pour la topologie I-adique En particulier les k-algèbres locales artiniennes sont complètes.*

Démonstration. Une suite de Cauchy est alors constante à partir d'un certain rang. □

Pro-représentabilité Introduisons maintenant plusieurs catégories. On désigne par k-**AlgLoc** la catégorie des k-algèbres locales : un morphisme $f : A \to B$ est un morphisme de k-algèbres tel que $f(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$. On note k-**AlgLocComp** la catégorie des k-algèbres locales complètes. Les morphismes y sont exactement les morphismes de k-algèbres locales : c'est une sous-catégorie pleine de k-**AlgLoc**. Enfin, on définit la catégorie k-**ProArtLoc** des k-algèbres locales complètes R telles que pour tout entier n, $R/(\mathfrak{m}_R)^n$ soit dans k-**ArtLoc**. Ce sont des limites projectives d'éléments de k-**ArtLoc**. La catégorie k-**ProArtLoc** contient en particulier les k-algèbres de la forme $k[[X_1, \dots, X_n]]/J$ pour $J \subset \mathfrak{m}_0$.

Pour résumer nous avons défini quatre catégories, chacune étant une sous-catégorie pleine de la suivante dans la liste

$$k\text{-}\mathbf{ArtLoc} \subset k\text{-}\mathbf{ProArtLoc} \subset k\text{-}\mathbf{AlgLocComp} \subset k\text{-}\mathbf{AlgLoc}.$$

En particulier entre deux éléments A, B chacun dans une de ces catégories on pourra toujours voir A et B dans k-**AlgLoc** et noter les morphismes par $\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{AlgLoc}}(A, B)$. Venons-en maintenant à la notion importante.

Définition 5.1.10 (Voir [Sch68]). Un foncteur $F : k\text{-}\mathbf{ArtLoc} \to \mathbf{Set}$ est dit *pro-représentable* s'il existe une k-algèbre locale complète R dans k-**ProArtLoc** tel que F soit isomorphe au foncteur

$$\begin{aligned} \operatorname*{Hom}_{k\text{-}\mathbf{AlgLoc}}(R, -) : k\text{-}\mathbf{ArtLoc} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ A &\longmapsto \operatorname*{Hom}_{k\text{-}\mathbf{AlgLoc}}(R, A). \end{aligned}$$

Exemple 5.1.11. L'exemple à garder en tête est celui-ci. On considère la k-algèbre locale complète $R = k[[X_1, \ldots, X_n]]/J$ pour un idéal $J \subset \mathfrak{m}_0$ (et en particulier $J = \widehat{I}$ où I est un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$). Elle pro-représente le foncteur

$$A \longmapsto \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathfrak{m}_A)^n \mid \forall F \in J, F(x_1, \ldots, x_n) = 0\}. \tag{7}$$

Remarquons que les éléments $X_0, \ldots, X_n$ sont dans l'idéal maximal de R donc leur image par un morphisme de k-algèbre locales doit être dans $\mathfrak{m}_A$ et pas seulement dans A.

Enfin on s'intéresse à la question de l'unicité de l'objet R qui pro-représente le foncteur F. En fait un foncteur pro-représentable est un pro-objet dans la catégorie des foncteurs représentables, on cherche donc un lemme de pro-Yoneda.

Théorème 5.1.12 (Lemme de pro-Yoneda, [GM88, lemme 3.2]). *Si R, S sont dans k-**ProArtLoc** alors toute transformation naturelle*

$$\operatorname*{Hom}_{k\text{-}\mathbf{AlgLoc}}(R, -) \longrightarrow \operatorname*{Hom}_{k\text{-}\mathbf{AlgLoc}}(S, -)$$

est induite par un morphisme $f : S \to R$. En particulier si R, S pro-représentent le même foncteur alors R, S sont isomorphes.

5.2 Germes analytiques

Les théorèmes de Goldman-Millson et Kapovich-Millson portent sur le germe d'une représentation du groupe fondamental. Nous avons besoin d'étudier un instant les germes. Dans cette section, les schémas sont tous de type fini sur le corps k.

Soit X un schéma, dont le faisceau structural est noté $\mathcal{O}_X$. On note (X, x) le germe en x et $\mathcal{O}_{X,x}$ son anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$.

Définition 5.2.1. L'*anneau local complété* $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est le complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ par rapport à son idéal maximal $\mathfrak{m}_x$. La donnée de (X, x) et de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est appelée un *germe analytique*. Deux germes (X, x) et (Y, y) sont dits *analytiquement isomorphes* si les anneaux locaux complétés $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ sont isomorphes.

Localement, comme le schéma est de type fini sur k, on peut se placer dans la situation de l'exemple 5.1.8 : $\mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à une k-algèbre locale $(k[X_1, \ldots, X_n]/I)_{(\mathfrak{m}_0)}$ où $\mathfrak{m}_0$ est l'idéal $(X_1, \ldots, X_n)$ et $I \subset \mathfrak{m}_0$, et donc $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est isomorphe à $k[[X_1, \ldots, X_n]]/\widehat{I}$.

Un germe analytique (X, x) définit un foncteur pro-représentable sur les k-algèbres locales artiniennes qu'on note (dans cette partie uniquement)

$$\begin{aligned} F_{X,x} : k\text{-}\mathbf{ArtLoc} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ A &\longmapsto \operatorname*{Hom}_{k\text{-}\mathbf{AlgLoc}}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}, A). \end{aligned} \tag{8}$$

C'est le *foncteurs des points* du germe analytique (X, x).

Définition 5.2.2. Plus généralement si F est un foncteur k-**ArtLoc** $\to$ **Set**, on dit qu'un germe (X,x) *pro-représente* F si l'anneau local complété $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ pro-représente F (au sens de 5.1.10).

Le théorème 5.1.12 (lemme de pro-Yoneda) justifie de s'intéresser aux germes analytiques via les foncteurs qu'ils pro-représentent.

Théorème 5.2.3 (Reformulation de 5.1.12)**.** *Les germes (X,x) et (Y,y) sont analytiquement isomorphes si et seulement si les foncteurs de points $F_{X,x}$ et $F_{Y,y}$ sont naturellement isomorphes.*

Par ailleurs le foncteur $F_{X,x}$ est un object que nous avons déjà rencontré à la section précédente, sous une autre forme.

Théorème 5.2.4. *Le foncteur des A-points au dessus de x, comme défini en 5.1.3, est isomorphe au foncteur $F_{X,x}$.*

Démonstration. On vérifie aisément que si $\mathcal{O}_{X,x} \simeq k[X_1,\ldots,X_n]/I$ ces deux foncteurs s'écrivent

$$A \longmapsto \{(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathfrak{m}_A)^n \mid \forall F \in I, F(x_1,\ldots,x_n) = 0\}$$

comme dans l'exemple 5.1.11. $\square$

La conséquence de ces deux derniers théorèmes est celle-ci. Dans le cas qui nous intéresse, étudier le germe analytique d'une représentation ρ d'un groupe fondamental Γ dans un groupe algébrique affine $G(k)$, vue comme un k-point d'un schéma $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, est la même chose qu'étudier les déformations de ρ c'est à dire (voir 5.1.5) comprendre comment étendre une représentation $\rho : \Gamma \to G(k)$ à $\tilde{\rho} : \Gamma \to G(A)$ telle que $q_*\tilde{\rho} = \rho$ (où q_* représente la réduction modulo $\mathfrak{m}_A$).

5.3 Singularités quasi-homogènes

Cette section est correctement traîtée dans la section 3 de [KM98], nous la réécrivons rapidement. Le but est de décrire ce à quoi ressemble le germe analytique dans le cas qui nous intéresse.

Fixons des entiers $w_1,\ldots,w_n > 0$ appelés *poids*. Tout ce qui va suivre est une généralisation de la théorie des polynômes homogènes et de l'espace projectif, théorie qu'on retrouvera exactement avec les poids $(w_1,\ldots,w_n) = (1,\ldots,1)$.

Définition 5.3.1. Un polynôme à n variables $P = \sum \lambda_\alpha X^\alpha$, où $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ est un multi-indice, est dit *quasi-homogène de degré d* si tous ses monômes X^α vérifient $w_1\alpha_1 + \cdots + w_n\alpha_n = d$.

Comme dans le cas des polynômes homogènes, l'anneau $k[X_1,\ldots,X_n]$ se décompose en une k-algèbre graduée

$$k[X_1,\ldots,X_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

où S_d est formé des polynômes quasi-homogènes de degré d. Un idéal I est dit *quasi-homogène* si

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap S_d)$$

où de façon équivalente I est engendré par des éléments quasi-homogènes. Le quotient $k[X_1,\ldots,X_n]/I$ est alors encore une k-algèbre graduée.

Définition 5.3.2. L'action de k^* sur k^n donnée par

$$t.(x_1,\ldots,x_n) := (t^{w_1}x_1,\ldots,t^{w_n}x_n)$$

est appelée *action par homothéties à poids*.

Si P est un polynôme quasi-homogène de degré $d > 0$ alors pour tout $t \in k^*$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in k^n$ on a

$$P(t.(x_1,\ldots,x_n)) = t^d P(x_1,\ldots,x_n) \tag{9}$$

et cette formule prouve que l'ensemble des zéros de P dans k^n, ou l'ensemble des zéros communs à plusieurs polynômes (de degrés possiblement différents, mais de mêmes poids) est stable par l'action par homothétie à poids.

Remarque 5.3.3. On pourrait introduire un espace projectif à poids $\mathbb{P}^{(w_1,\ldots,w_n)}(k)$, quotient de $k^n \setminus \{0\}$ par l'action par homothéties à poids. Les polynômes quasi-homogènes jouent le même rôle sur $\mathbb{P}^{(w_1,\ldots,w_n)}(k)$ que les polynômes homogènes sur l'espace projectif classique $\mathbb{P}^{n-1}(k)$, qu'on retrouve avec $(w_1,\ldots,w_n) = (1,\ldots,1)$.

Mais comme on veut travailler avec des schémas, la bonne définition est celle-ci.

Définition 5.3.4. Un *cône quasi-homogène* $(Y,0)$ est un sous-schéma fermé de l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$, contenant le point 0, décrit par des polynômes quasi-homogènes.

C'est donc un schéma affine d'anneau $k[X_1,\ldots,X_n]/I$ où I est un idéal quasi-homogène contenu dans $\mathfrak{m}_0$ (l'idéal de 0). L'idéal I est engendré par un nombre fini de polynômes quasi-homogènes $P_1,\ldots,P_r$ (pour les poids $w_1,\ldots,w_n$ fixés à l'avance), de degrés possiblement différents et non nuls.

Définition 5.3.5. Si $(Y,0)$ est un cône quasi-homogène avec une présentation fixée sous forme $k[X_1,\ldots,X_n]/(P_1,\ldots,P_r)$, les entiers $w_1,\ldots,w_n$ (associés à $X_1,\ldots,X_n$) sont appelés *poids des générateurs* et les degrés des polynômes $P_1,\ldots,P_r$ sont appelés *poids des relations*.

En particulier l'ensemble des k-points d'un tel cône quasi-homogène est une partie de k^n contenant 0 et stable par l'homothétie à poids.

Définition 5.3.6. On dit que le cône $(Y,0)$ est *quadratique* si les générateurs sont tous de poids 1 et les relations sont de poids 2, autrement dit les polynômes $P_1,\ldots,P_r$ sont tous homogènes de degré 2.

Enfin à un cône quasi-homogène $(Y,0)$, on associe son germe analytique en 0 décrit par l'anneau local complété $k[[X_1,\ldots,X_n]]/\widehat{I}$.

Définition 5.3.7. Un germe analytique (X,x) est dit *quasi-homogène* si (X,x) est analytiquement isomorphe au germe en 0 d'un cône quasi-homogène $(Y,0)$.

Cela est équivalent à dire que l'anneau $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ admet une présentation de la forme $k[[X_1,\ldots,X_n]]/\widehat{I}$ où I est l'idéal du cône quasi-homogène $(Y,0)$.

On cherche une caractérisation intrisèque des germes analytiques quasi-homogènes. Si I est un idéal quasi-homogène la graduation sur l'anneau $k[X_1,\ldots,X_n]/I$ induit une filtration décroissante W sur l'anneau complété $k[[X_1,\ldots,X_n]]/\widehat{I}$, où W^d est l'adhérence de l'ensemble des polynômes de poids supérieur à d. Le gradué associé est $\mathrm{Gr}^d_W := W^{d+1}/W^d$. Le vocabulaire des filtrations sera revu à la section 7.

Définition 5.3.8. Une k-algèbre locale complète R est dite quasi-homogène s'il existe une filtration décroissante W sur R telle que :
- $\mathrm{Gr}^0_W = k$.
- $\cap_{d=0}^{\infty} W^d = 0$.
- $\forall d,\ \dim_k \mathrm{Gr}^d_W < \infty$.
- Il existe un morphisme injectif $\mathrm{Gr}_W \to R$ compatible avec les filtrations et d'image dense.

On vérifie aisément que c'est bien le cas d'un germe analytique quasi-homogène, et réciproquement :

Proposition 5.3.9 ([KM98, lemme 3.2]). *Si $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est une k-algèbre quasi-homogène alors (X,x) est un germe analytique quasi-homogène.*

5.4 Groupoïdes

L'article [GM88] démontre de nombreuses équivalences de groupoïdes pour montrer que des théories de déformation sont équivalentes. Nous rappelons rapidement le vocabulaire des groupoïdes. Pour la théorie des catégories on se reporte à Mac Lane [ML71].

Définition 5.4.1. Un *groupoïde* est une catégorie petite dans laquelle tous les morphismes sont des isomorphismes.

Soit $\mathscr{C}$ un groupoïde. On note $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ l'ensemble de ses objets. Pour chaque objet x, la catégorie formée du seul objet x et de l'ensemble des morphismes $x \to x$ forme un groupe (vu comme une catégorie petite). On l'appelle le *stabilisateur* de x. On note $\mathrm{Iso}(\mathscr{C})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme : par définition c'est aussi l'ensemble des composantes connexes de la catégorie $\mathscr{C}$ vue comme un graphe.

Exemple 5.4.2. Soit X un espace topologique. Le *groupoïde fondamental* qu'on note $\pi_1(X)$ est le groupoïde dont l'ensemble des objets est X et les morphismes $x \to y$ sont les classes d'homotopie de chemins de x à y. Les classes d'isomorphisme sont les composantes connexes de X. Si x est un point fixé, le stabilisateur de x est le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ (de la composante connexe par arcs de x). L'opération de monodromie est un foncteur $\pi_1(X) \to \mathbf{Set}$ qui à x associe la fibre en x et relève un chemin de x à y.

On voit sur cet exemple qu'un groupoïde est un objet qui tient compte à la fois des stabilisateurs et des classes d'isomorphismes : $\pi_1(X)$ contient $\pi_0(X)$ et les $\pi_1(X, x)$.

Définition 5.4.3. Soit X un ensemble et G un groupe qui agit sur X. Le *groupoïde d'action* (X,G) est le groupoïde dont les objets sont les éléments de X est les morphismes $x \to y$ sont les éléments $g \in G$ tels que $g.x = y$.

Dans ce cas le stabilisateur de x est bien le stabilisateur de la théorie des groupes, ce qui justifie la terminologie. Soient $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ deux catégories petites.

Définition 5.4.4. Une paire de foncteurs $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}, G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ est une *équivalence de catégories* si la composition FG est naturellement isomorphe à l'identité de $\mathscr{D}$ et GF est naturellement isomorphe à l'identité de $\mathscr{C}$.

Théorème 5.4.5 ([ML71, section IV.4])**.** *Un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ induit une équivalence de catégories si et seulement si*

- *F est un foncteur* plein *: tout morphisme $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(x), F(y))$ est de la forme $F(f)$ pour un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x, y)$.*
- *F est un foncteur* fidèle *: le morphisme f ci-dessus est unique.*
- *F est* essentiellement surjectif *: tout objet de $\mathscr{D}$ est isomorphe à un unique objet de la forme $F(c)$ pour un objet c de $\mathscr{C}$.*

En particulier, une équivalence de groupoïdes $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ induit une bijection $\mathrm{Iso}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Iso}(\mathscr{D})$. Dans le cas de groupoïdes d'action (X, G) et (Y, H), une équivalence de groupöides est une notion plus faible qu'un isomorphisme d'actions mais qui induit quand même une bijection entre les quotients X/G et Y/H.

Exemple 5.4.6. Nous avons déjà rencontré de nombreuses équivalences de catégories, que nous avons écrites moins formellement comme « la donnée de [...] est équivalente à la donnée de [...] », au moment de traîter des systèmes locaux et de la monodromie.

Philosophie générale Selon une lettre de Deligne adressée à Millson, un problème de déformation consiste en un groupoïde $\mathscr{C}$ dont les objets correspondent aux objets que l'on veut classer et les isomorphismes indiquent les relations d'équivalence entre ces objets. L'*espace de modules* est alors l'ensemble des classes d'isomorphismes du groupoïde. Deux théories de déformation seront considérées comme équivalentes quand les groupoïdes correspondant seront équivalents. En fait nous aurons affaire à des foncteurs en groupoïdes $A \mapsto \mathscr{C}(A)$ sur les k-algèbre locales artiniennes et les théories seront équivalentes quand les groupoïde $\mathscr{C}(A), \mathscr{D}(A)$ seront équivalents et de façon fonctorielle en A.

5.5 Algèbres de Lie différentielles graduées

Nous introduisons encore une structure algébrique et nous développons la théorie de ses déformations. L'article de Nijenhuis-Richardson [NR66] étudie en détail ces structures. Il est important de garder en tête l'exemple 2.1.9 car c'est par cette méthode que seront formées nos algèbres de Lie différentielles graduées.

On rappelle que le corps k est toujours supposé de caractéristique nulle. Les algèbres de Lie ne sont pas supposées être associées à des groupes de Lie et l'application exp n'est qu'une série formelle. Les graduations seront toujours sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et les dérivations, sans précisions supplémentaires, seront toujours de degré 1.

Définition 5.5.1. Une *algèbre de Lie graduée* est la donné d'un espace vectoriel gradué

$$L = \bigoplus_{i=0}^{\infty} L^i,$$

d'un *crochet de Lie au sens gradué*

$$[-,-] : L^i \times L^j \longrightarrow L^{i+j}$$

bilinéaire, *antisymétrique au sens gradué*

$$[\alpha, \beta] = -(-1)^{ij}[\beta, \alpha]$$

et qui satisfait l'*identité de Jacobi graduée*

$$(-1)^{kl}[\alpha, [\beta, \gamma]] + (-1)^{ij}[\beta, [\gamma, \alpha]] + (-1)^{jk}[\gamma, [\alpha, \beta]]$$

où α, β, γ sont de degré respectivement i, j, k.

Remarquons que L^0 est alors une algèbre de Lie au sens classique. Dans toute la suite on fixe une algèbre de Lie différentielle graduée L.

Exemple 5.5.2. C'est la structure qu'on obtient naturellement sur le produit tensoriel d'une algèbre graduée $\mathcal{A} = \bigoplus \mathcal{A}^i$ *commutative au sens graduée* (i.e. $\alpha\beta = (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)}\beta\alpha$) par une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ en définissant le crochet par

$$[\alpha \otimes u, \beta \otimes v] = (\alpha\beta) \otimes [u, v]$$

avec $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^*$ et $u, v \in \mathfrak{g}$.

Définition 5.5.3. Une *dérivation de degré ℓ* de L est une application linéaire d de degré ℓ, (i.e. $d(L^i) \subset L^{i+\ell}$) tel que pour α, β de degré i, j

$$d[\alpha, \beta] = [d\alpha, \beta] + (-1)^{i\ell}[\alpha, d\beta].$$

A cause de l'identité de Jacobi, si α est de degré i l'application adjointe

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(\alpha) : L^j &\longrightarrow L^{j+i} \\ \beta &\longmapsto [\alpha, \beta] \end{aligned}$$

est une dérivation de degré i.

Définition 5.5.4. Une *algèbre de Lie différentielle graduée* est une algèbre de Lie graduée L munie d'une dérivation d de degré 1.

Exemple 5.5.5. C'est la structure qu'on obtient naturellement sur le produit tensoriel d'une algèbre différentielle graduée $(\mathcal{A}, d)$ par une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ en définissant la dérivation par

$$d(\alpha \otimes u) = (d\alpha) \otimes u$$

avec $\alpha \in \mathcal{A}$ et $u \in \mathfrak{g}$. Mais aussi sur la version tordue par un système local d'algèbres de Lie, comme en 2.1.9.

Dans la suite on suppose que L est munie de la différentielle d. Les définitions de sous-algèbre, d'idéal, de morphisme, sont évidentes (on peut se référer à [NR66]). La cohomologie $H^*(L)$ hérite naturellement de la structure d'algèbre de Lie graduée, de différentielle nulle. Une algèbre de Lie différentielle graduée de différentielle nulle est la même chose qu'une algèbre de Lie graduée ; et une algèbre de Lie est la même chose qu'une algèbre de Lie graduée concentrée en degré 0.

Définition 5.5.6. L'*équation de Maurer-Cartan* est l'équation portant sur $\alpha \in L^1$

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0. \tag{10}$$

Les éléments qui la vérifient sont appelés *éléments de Maurer-Cartan.*

Remarquons que les deux termes de la somme sont de degré 2 et que le crochet de Lie $L^1 \otimes L^1 \to L^2$ est symétrique.

Déformation Si A est une k-algèbre, le produit $L \otimes A$ est naturellement une algèbre de Lie différentielle graduée en définissant (on écrira toujours α, β les éléments de L et u, v les éléments de A)

$$[\alpha \otimes u, \beta \otimes v] = [\alpha, \beta] \otimes (uv)$$
$$d(\alpha \otimes u) = (d\alpha) \otimes u.$$

En particulier si $A = k[t]/(t^{n+1})$, on peut penser à $L \otimes A$ comme à une déformation à l'ordre n de l'algèbre de Lie L. Les éléments de $L \otimes A$ s'écrivent sous une unique forme

$$\alpha + \alpha_1 \otimes t^1 + \cdots + \alpha_n \otimes t^n$$

et on y pense comme à un développement limité à l'ordre n. Si l'élément α est fixé dans L alors on voit que c'est l'idéal maximal de A, engendré par t, qui paramètre les déformations de α. Nous allons formaliser cela.

On fixe une k-algèbre locale artinienne A. On notera toujours $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et q la projection $A \to k$. Les produits $L \otimes A$ et $L \otimes \mathfrak{m}$ sont donc des algèbres de Lie différentielles graduées. La projection q s'étend en $\mathrm{id}_L \otimes q$ et la suite exacte (6) associée à A donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \otimes \mathfrak{m} \longrightarrow L \otimes A \xrightarrow{q} L \longrightarrow 0. \tag{11}$$

Nous avons là une analogie forte avec la déformation des représentations aperçue à l'exemple 5.1.5 et qui sera approfondie dans la section suivante.

Définition 5.5.7. Si $\alpha \in L$, les éléments $\tilde{\alpha} \in L \otimes A$ tels que $q(\tilde{\alpha}) = \alpha$ sont appelés les *A-déformations de α*. Si $A = k[t]/(t^{n+1})$ on parle de *déformations à l'ordre n*.

Grâce à la suite exacte (11) les A-déformations de α forment un espace affine de direction $L \otimes \mathfrak{m}$ passant par un point particulier $\alpha \otimes 1$, l'image de α par l'inclusion canonique $L \to L \otimes A$.

Proposition 5.5.8. *L'algèbre de Lie différentielle graduée $L \otimes \mathfrak{m}$ est* nilpotente *: la suite d'idéaux $C_n := [L \otimes \mathfrak{m}, L \otimes \mathfrak{m}^n]$, qui est décroissante et telle que $[C_n, L \otimes \mathfrak{m}] \subset C_{n+1}$, est nulle pour n assez grand. La sous-algèbre de Lie $L^0 \otimes \mathfrak{m}$ est aussi nilpotente.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de 5.1.6 : l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est nilpotent. ☐

En particulier pour tout élément α de $L^0 \otimes \mathfrak{m}$ l'endomorphisme $\mathrm{ad}(\alpha)$ est nilpotent et son indice de nilpotence ne dépend que de celui de $\mathfrak{m}$ dans A. Nous allons évaluer des séries formelles en des éléments nilpotents.

Formule de Campbell-Hausdorff Rappelons qu'on appelle *polynôme non commutatif* sur un corps k en n variables $X_1, \ldots, X_n$ une combinaison linéaire à coefficients dans k de termes (monômes) de la forme

$$X_{i_d}^{a_d} \cdots X_{i_1}^{a_1}$$

où $i_1, \ldots, i_d$ sont des entiers dans $\{1, \ldots, n\}$ et $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers positifs. Le *degré* d'un tel monôme est la somme $a_1 + \cdots + a_d$. Leur propriété universelle est qu'on peut remplacer les variables X_i par des éléments x_i quelconques d'une k-algèbre associative non commutative.

Si maintenant $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on a encore une notion de remplacement des X_i par des éléments de $\mathfrak{g}$ et des produits par des crochets de Lie. Mais comme l'algèbre de Lie n'est pas associative, il faut choisir un *sens d'associativité*. On choisit de partir de la droite et on note de la même façon les variables $X_1, \ldots, X_n$ du polynôme non commutatif et les éléments d'une algèbre de Lie ; il n'y a pas de confusion possible car l'opération de produit n'est pas la même. Un seul exemple suffira à comprendre : le monôme non commutatif en trois variables XY^2Z correspond au remplacement associatif à droite

$$[X, [Y, [Y, Z]].$$

Remarquons que le degré du monôme est un de plus que le nombre de crochets de Lie emboîtés.

Enfin on peut aussi considérer des *séries formelles non commutatives* sur k en n variables $X_1, \ldots, X_n$. Leur propriété est qu'on peut remplacer les variables X_i par des éléments x_i appartenant à un même idéal à gauche nilpotent I d'une algèbre A associative, et non commutative ; plus généralement, un idéal à gauche I tel que A est complète pour la topologie I-adique. Si $k = \mathbb{R}$ on peut remplacer les X_i par des éléments d'une $\mathbb{R}$-algèbre avec une certaine notion de domaine de convergence. De même on peut évaluer en partant de la droite des séries formelles non commutatives en des éléments d'une algèbre de Lie nilpotente ; ou d'une algèbre de Lie réelle avec une notion de domaine de convergence.

Supposons un court instant que $k = \mathbb{R}$ et que $\mathfrak{g}$ soit l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G. L'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme local entre un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage de l'identité de G et l'inverse est noté log.

Théorème 5.5.9 (admis)**.** *Il existe une série formelle non commutative définie sur $\mathbb{Q}$ en deux variables, notée (temporairement) CH, tel que si $k = \mathbb{R}$ et si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G, si X, Y sont dans $\mathfrak{g}$ au voisinage de 0, alors* $\log(\exp(X)\exp(Y))$ *est égal à la somme convergente $CH(X,Y)$ au sens du remplacement à droite dans une série formelle non commutative par des éléments d'une algèbre de Lie. On l'appelle la* formule de Campbell-Hausdorff.

On utilise directement la notation $\log(\exp(X)\exp(Y))$ pour $CH(X,Y)$. Nous n'aurons pas besoin de l'expression exacte mais seulement des premiers termes (ici à l'ordre 3) :

$$\log(\exp(X)\exp(Y)) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \cdots . \tag{12}$$

Les termes d'ordre n sont ceux qui font apparaître $n-1$ crochets de Lie, correspondant aux monômes de degré n dans la série formelle non commutative.

Proposition 5.5.10. *Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie nilpotente, par exemple $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$. L'application*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{h} \\ (X,Y) &\longmapsto \log(\exp(X)\exp(Y)) \end{aligned}$$

induit une structure de groupe sur l'ensemble $\mathfrak{h}$. On l'appelle multiplication de Campbell-Hausdorff.

Démonstration. On utilise la définition 5.5.9. Clairement dans le cas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G cette application vérifie les axiomes d'associativité, inverse et élément neutre sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$. L'écriture de chacun de ces axiomes correspond à une série formelle, par exemple pour l'associativité

$$\log(\exp(\log(\exp(X)\exp(Y)))\exp(Z)) - \log(\exp(X)\exp(\log(\exp(Y)\exp(Z)))) = 0.$$

On peut ensuite identifier cette série réelle convergente en trois variables avec une série formelle définie sur $\mathbb{Q}$. Ainsi les axiomes des lois de groupes sont vérifiés au niveau de la série formelle, donc a fortiori dans une algèbre de Lie nilpotente. ☐

Groupoïde On revient maintenant au problème de déformation, donc à l'algèbre de Lie différentielle graduée L, la k-algèbre locale artinienne A et l'algèbre de Lie nilpotente $L^0 \otimes \mathfrak{m}$. On définit le groupe qu'on note $\exp(L^0 \otimes \mathfrak{m})$ qui est l'ensemble $L^0 \otimes \mathfrak{m}$ muni de la multiplication de Campbell-Hausdorff. Les éléments sont notés $\exp(X)$ pour $X \in L^0 \otimes \mathfrak{m}$ et si le produit de Campbell-Hausdorff de X par Y est Z on note $\exp(X)\exp(Y) = \exp(Z)$, ce qui correspond à $Z = \log(\exp(X)\exp(Y))$.

Exemple 5.5.11. Étudions le cas de la déformation jusqu'à l'ordre 2 c'est à dire $A = k[t]/(t^3)$. Un élément de $L^0 \otimes \mathfrak{m}$ s'écrit

$$X = X_1 \otimes t + X_2 \otimes t^2$$

et la formule de Campbell-Hausdorff (12) donne la loi de multiplication à l'ordre 2, qu'on réordonne selon les puissances de t :

$$\log(\exp(X)\exp(Y)) = (X_1 + Y_1) \otimes t + (X_2 + Y_2 + \frac{1}{2}[X_1, Y_1]) \otimes t^2. \tag{13}$$

On peut calculer explicitement la multiplication à l'ordre n (au sens de l'ordre en t) dès qu'on se donne la formule de Campbell-Hausdorff à l'ordre n.

On définit maintenant une action du groupe $\exp(L^0 \otimes \mathfrak{m})$ sur le terme L^1 de l'algèbre de Lie. On définit la série formelle

$$\exp'(X) := \frac{1 - \exp(X)}{X} = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{(i+1)!}.$$

Si X est dans $L^0 \otimes \mathfrak{m}$, on peut évaluer des séries formelles en $\mathrm{ad}(X)$, qui est un endomorphisme nilpotent de degré 0 de L.

Définition 5.5.12. L'*action affine* de $\exp(L^0 \otimes \mathfrak{m})$ sur L^1 est l'action donnée par :

$$\exp(X) : \alpha \longmapsto \exp(\mathrm{ad}(X))(\alpha) + \exp'(\mathrm{ad}(X))(dX) \tag{14}$$

Rappelons que pour la déformation on s'intéresse à l'équation de Maurer-Cartan 5.5.6 dans L^1, ou sa déformation dans $L^1 \otimes \mathfrak{m}$. Cette dernière définition, et la proposition qui s'ensuit, ne peuvent se comprendre que dans le cadre des connexions sur une fibré principal ([GM88, section 5]).

Proposition 5.5.13 (admis)**.** *L'action affine est bien une action du groupe* $\exp(L^0 \otimes \mathfrak{m})$ *et préserve le sous-espace*

$$Q_A := \{\alpha \in L^1 \otimes \mathfrak{m} \mid d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\} \tag{15}$$

*qui correspond à l'*équation de Maurer-Cartan déformée.

Exemple 5.5.14. Si $A = k[t]/(t^{n+1})$ il est facile d'écrire explicitement l'équation déformée : en écrivant

$$\alpha = \alpha_1 \otimes t + \cdots + \alpha_n \otimes t^n$$

résoudre l'équation déformée revient à résoudre, successivement, les équations

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= 0 \\ d\alpha_2 &= -\frac{1}{2}[\alpha_1, \alpha_1] \\ &\vdots \\ d\alpha_n &= -\frac{1}{2} \sum_{i+j=n} [\alpha_i, \alpha_j]. \end{aligned} \tag{16}$$

On trouve là un analogue intéressant avec la théorie de la déformation de structure complexe de Kodaira-Spencer, exposée par exemple dans [Huy04, chapitre 6]. Elle correspond à l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathcal{A}^{0,q}(X, TX)$ des formes différentielles de type $(0, q)$ à valeur dans le fibré tangent holomorphe TX avec la différentielle $\bar{\partial}$.

Définition 5.5.15. Le *groupoïde de Deligne-Goldman-Millson*, noté $\mathscr{C}(L, A)$, est le groupoïde d'action dont l'ensemble est Q_A, c'est à dire les éléments de Maurer-Cartan déformés (15), et le groupe est $\exp(L^0 \otimes \mathfrak{m})$ qui agit par l'action affine. C'est en fait un *foncteur en groupoïdes* $A \mapsto \mathscr{C}(L, A)$ défini sur la catégorie des k-algèbres locales artiniennes.

Dans la suite on aura aussi à considérer le foncteur $A \mapsto \mathrm{Iso}(\mathscr{C}(L, A))$ vers la catégorie des ensembles.

5.6 Déformation des représentations

Nous venons de développer une théorie de la déformation dans les algèbres de Lie. Nous développons maintenant une deuxième théorie, dont nous avons déjà parlé, celle de la déformation des représentations. On montrera plus tard que dans notre cas elle est équivalente à une théorie de la déformation dans une algèbre de Lie différentielle graduée.

On fixe un groupe de type fini Γ, un groupe algébrique affine G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et une réprésentation $\rho : \Gamma \to G(k)$. On désigne toujours par A une k-algèbre artinienne locale, par $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal et $q : A \to k$ la projection. Rappelons la notion déjà vue à l'exemple 5.1.5.

Définition 5.6.1. Les A-déformations de ρ sont les A-points de $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ au dessus de ρ (définition 5.1.3). Ce sont les représentations $\tilde{\rho} : \Gamma \to G(A)$ telles que $q_* \tilde{\rho} : \Gamma \to G(k)$ soit égal à ρ.

On rappelle qu'étudier les A-déformations de ρ est la même chose qu'étudier le germe analytique de ρ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ (théorème 5.2.4) et qu'étudier le foncteur pro-représentable défini par le germe analytique (lemme de pro-Yoneda 5.1.12).

On cherche maintenant une structure de groupoïde sur l'ensemble des A-déformations, obtenue par une action de groupe. Le groupe $G(A)$ agit naturellement par conjugaison sur $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(A))$ (c.f. définition 4.2.5). Mais le groupe qui agit sur les A-points au dessus de ρ est le groupe qu'on note $G^0(A)$ des A-points au dessus de l'identité, qui est aussi le noyau du morphisme $q_* : G(A) \to G(k)$. Il est en effet clair que si g est dans $G^0(A)$ alors

$$q_*(g.\tilde{\rho}) = q_*(g)q_*(\tilde{\rho})q_*(g^{-1}) = q_*\tilde{\rho}$$

et ceci est égal à ρ si $\tilde{\rho}$ est au dessus de ρ. Il nous faut donc étudier la structure du groupe $G^0(A)$.

Lemme 5.6.2. *Le groupe $G(A)$ est isomorphe à un produit semi-direct*

$$G(A) \simeq G^0(A) \rtimes G(k)$$

dans lequel $q : G(A) \to G(k)$ devient la projection sur le second facteur.

Démonstration. La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow G^0(A) \longrightarrow G(A) \xrightarrow{q_*} G(k) \longrightarrow 0 \tag{17}$$

est canoniquement scindée grâce à $i_* : G(k) \to G(A)$. □

L'avantage de raisonner en produit semi-direct est que les A-déformations de ρ sont exactement les morphismes de la forme (u, ρ) où u est une application $\Gamma \to G^0(A)$, qui doit vérifier la condition que (u, ρ) soit un morphisme pour la loi du produit semi-direct.

Lemme 5.6.3. *Il existe un groupe algébrique affine G_A sur k tel que $G_A(k) = G(A)$. Le groupe G_A a pour foncteur des points $B \mapsto G(A \otimes B)$ et pour algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes A$. De même il existe un groupe algébrique affine G_A^0 sur k tel que $G_A^0(k) = G^0(A)$, de foncteur des points $B \mapsto G^0(\mathfrak{m} \otimes B)$ et d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$.*

Esquisse de démonstration. Supposons que G est un schéma sur k défini par des polynômes en N variables, alors $G(A)$ est une partie de A^N. Mais l'algèbre A elle-même est de dimension finie n sur k donc avec le choix d'une base $A \simeq k^n$ en tant qu'espace vectoriel sur k. La multiplication dans A est donnée dans la base par une application bilinéaire $k^n \otimes k^n \to k^n$. Dans un polynôme P on peut alors exprimer les produits d'éléments de A par des produits dans k et P devient un polynôme Q en nN variables tel que les solutions dans k^{nN} de $Q = 0$ sont les solutions dans A^N de $P = 0$ via $A \simeq k^n$.

On construit G_A^0 de la même façon en commençant par scinder $A \simeq k \oplus \mathfrak{m}$, donc $A^N \simeq k^N \oplus \mathfrak{m}^N$, et $\mathfrak{m} \simeq k^{n-1}$. L'identité est un certain élément de A^N dont les coordonnées dans $\mathfrak{m}^N$ sont nulles. La condition d'être au dessus de l'identité dans $G(A)$ s'écrit donc avec des polynômes en des éléments de k^N, étendus en des polynômes sur tout $k^{nN} \simeq A^N$. □

Remarquons la cohérence des notations avec la remarque 4.1.11 : dans l'algèbre de Lie tout se passe comme si G_A était obtenu par changement de base de G. Mais ce dernier résultat ne simplifie pas encore les calculs, celui-ci qui sera plus utile pour construire explicitement le groupe $G^0(A)$.

Théorème 5.6.4. *Le groupe $G^0(A)$ est isomorphe au groupe $\exp(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m})$ (i.e. l'ensemble $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$ muni de la multiplication de Campbell-Hausdorff, voir 5.5.10). Dans cet isomorphisme l'action de $G(k)$ sur $G^0(A)$ par conjugaison devient l'action de $G(k)$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$ par Ad. Au sens des schémas, G_A^0 est isomorphe au groupe $\exp(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m})$ de foncteur des points $B \mapsto \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m} \otimes B$ et de multiplication donnée par la formule de Campbell-Hausdorff qui s'étend en B et l'action par Ad s'étend aussi.*

Esquisse de démonstration. On se restreint au cas où G est linéaire, donc $G \subset GL(n, k)$ et $\mathfrak{g} = \mathcal{M}_n(k)$. Alors la multiplication de Campbell-Hausdorff sur $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$ est l'application $(X, Y) \mapsto \log(\exp(X)\exp(Y))$ au sens des séries formelles exponentielle et logarithme et de la multiplication dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m} \simeq \mathcal{M}_n(\mathfrak{m})$. Mais ces séries formelles sont inverses l'une de l'autre, donc $\exp : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m} \to G^0(A)$ est tautologiquement l'isomorphisme recherché. Il est bien connu que dans le cas linéaire l'action par Ad est l'action par conjugaison et cela ne pose aucun problème d'étendre en B. □

Corollaire 5.6.5. *Dans le lemme 5.6.2, le produit semi-direct peut s'écrire au sens des schémas, soit*

$$G_A = G_A^0 \rtimes G$$

avec G qui agit sur G^0 par conjugaison, soit

$$G_A = \exp(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}) \rtimes G$$

avec G qui agit par Ad.

Calcul des déformations Le théorème 5.6.4 permet de calculer facilement les A-déformations de ρ dès que l'on se donne la formule de Campbell-Hausdorff à un ordre suffisant. Pour cela on écrit une A-déformation de ρ qu'on note $\tilde{\rho}$ sous la forme $\gamma \mapsto (\exp(u(\gamma)), \rho(\gamma))$. On calcule avec la loi du produit semi-direct tordu par Ad le produit $\tilde{\rho}(\gamma)\tilde{\rho}(\tau)$ pour $\gamma, \tau \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\gamma)\tilde{\rho}(\tau) &= (\exp(u(\gamma)), \rho(\gamma)).(\exp(u(\tau)), \rho(\tau)) \\ &= (\exp(u(\gamma))(\rho(\gamma). \exp(u(\tau))), \rho(\gamma)\rho(\tau)) \\ &= (\exp(u(\gamma)) \exp(\mathrm{Ad}(\rho(\gamma))(u(\tau))), \rho(\gamma\tau)) \end{aligned}$$

et on ne s'intéresse plus qu'à la première composante du produit semi-direct. La condition sur u pour que $\tilde{\rho}$ soit un morphisme est alors

$$\forall \gamma, \tau \in \Gamma, \quad \exp(u(\gamma)) \exp(\mathrm{Ad}(\rho(\gamma))(u(\tau))) = \exp(u(\gamma\tau)) \tag{18}$$

qu'on calcule avec la formule de Campbell-Hausdorff.

Nous allons illustrer le cas $A = k[t]/(t^2)$ pour en déduire l'espace tangent en ρ à la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, calcul qu'on aurait par ailleurs pu faire à la main beaucoup plus tôt dans le cas $G = GL(n)$. L'élément $u(\gamma)$ est dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$ et s'écrit donc $u_1(\gamma) \otimes t$. La multiplication de Campbell-Hausdorff à l'ordre 1 est simplement (voir l'exemple 5.5.11)

$$\log(\exp(X_1 \otimes t) \exp(Y_1 \otimes t)) = (X_1 + Y_1) \otimes t.$$

La condition (18), qui est réduite à l'ordre 1, devient alors

$$\forall \gamma, \tau \in \Gamma, \quad u_1(\gamma\tau) = u_1(\gamma) + \mathrm{Ad}(\rho(\gamma))(u_1(\tau)). \tag{19}$$

Nous avons déjà rencontré cette équation avec la cohomologie des groupes, proposition 2.2.6.

Théorème 5.6.6. *L'espace tangent en ρ à la variété des représentations* $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ *est isomorphe au groupe des cocycles $Z^1(\Gamma, \mathrm{Ad} \circ \rho)$ de Γ agissant via ρ sur l'algèbre de Lie de G. Il est formé des applications $u_1 : \Gamma \to \mathfrak{g}$ satisfaisant la condition (19) ci-dessus. On peut montrer que si $H^1(\Gamma, \mathrm{Ad} \circ \rho) = 0$ alors ρ est un point lisse du schéma* $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$.

Le calcul à l'ordre 2 est à peine plus difficile : si $A = k[t]/(t^3)$ la formule de Campbell-Hausdorff à l'ordre 2 est écrite à l'exemple 5.5.11 et un élément $u(\gamma)$ s'écrit

$$u(\gamma) = u_1(\gamma) \otimes t + u_2(\gamma) \otimes t^2.$$

La condition (18) sur u est

$$\begin{aligned} \forall \gamma, \tau \in \Gamma, \quad u_1(\gamma\tau) &= u_1(\gamma) + \mathrm{Ad}(\rho(\gamma))(u_1(\tau)) \\ u_2(\gamma\tau) &= u_2(\gamma) + \mathrm{Ad}(\rho(\gamma))(u_2(\tau)) + \frac{1}{2}[u_1(\gamma), \mathrm{Ad}(\rho(\gamma))(u_1(\tau))]. \end{aligned}$$

En introduisant la différentielle d de la cohomologie des groupes en degré 1 ceci se réécrit

$$\begin{aligned} du_1 &= 0 \\ du_2 &= -\frac{1}{2}[u_1, u_1] \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} [-,-] : Z^1(\Gamma, \mathrm{Ad} \circ \rho) \times Z^1(\Gamma, \mathrm{Ad} \circ \rho) &\longrightarrow Z^2(\Gamma, \mathrm{Ad} \circ \rho) \\ (u, v) &\longmapsto [u, v](\gamma, \tau) := [u(\gamma), \mathrm{Ad}(\rho(\gamma))(v(\tau))] \end{aligned}$$

est un crochet de Lie tordu. Réécrit encore on obtient :

Théorème 5.6.7. *L'ensemble des déformations à l'ordre 2 de ρ dans la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est isomorphe à l'ensemble des éléments $u_1 \in Z^1(\Gamma, \mathrm{Ad} \circ \rho)$ tels que $[u_1, u_1] = 0$ dans $H^2(\Gamma, \mathrm{Ad} \circ \rho)$.*

La notion est plus approfondie dans [GM88] car leur but est d'étudier le cône quadratique d'une représentation du groupe fondamental d'une variété kählérienne ; mais comme nous ne nous limitons pas aux variétés kählériennes et aux cônes quadratiques, nous n'en avons pas besoin.

Groupoïde Avec tout ce que nous avons fait jusque là, il n'y a plus beaucoup de commentaires à faire sur la structure de groupoïde.

Définition 5.6.8. Le *groupoïde des déformations des représentations* est le foncteur en groupoïdes sur les k-algèbres locales artiniennes noté $A \mapsto \mathscr{R}(\rho, A)$ dont les objets sont les A-déformations de ρ dans la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ et les morphismes sont donnés par l'action du groupe $G^0(A)$ par conjugaison sur $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(A))$.

Nous utiliserons aussi le foncteur $A \mapsto \mathrm{Obj}(\mathscr{R}(\rho, A))$ vers la catégorie des ensembles, qui correspond exactement aux A-déformations de ρ.

6 Résumé de l'article de Goldman-Millson

Nous avons tous les outils pour comprendre la théorie de Goldman-Millson. Dans les deux sections suivantes nous résumons l'article [GM88] sans être très formel et sans réécrire les démonstrations, dont certaines sont très longues et techniques. Le but est de montrer le théorème 1.0.1 de l'introduction ; toutes les autres références seront des références à l'article de Goldman-Millson.

6.1 Équivalences de théories de la déformation

On fixe une variété différentiable X dont le groupe fondamental Γ est de type fini (a fortiori, de présentation finie) et un groupe de Lie algébrique G sur $\mathbb{R}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dans ce cadre uniquement on note de la même façon le schéma G et son groupe de Lie des $\mathbb{R}$-points. On fixe aussi une représentation $\rho : \Gamma \to G$ et on note L l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathcal{A}^*(X, \mathrm{Ad}(\rho))$ obtenue par monodromie.

L'un des théorèmes principaux est :

Théorème 6.1.1 ([GM88, propositions 6.3 et 6.6]). *Les groupoïdes $A \mapsto \mathscr{R}(\rho, A)$ et $A \mapsto \mathscr{C}(L, A)$ sont équivalents, fonctoriellement en A.*

La démonstration passe par une troisième construction dont nous n'avons pas du tout parlé jusque là : celle des fibrés principaux. Via la représentation ρ, le groupe Γ agit sur G par multiplication à gauche et la monodromie de cette action donne un fibré P de groupe de structure G. Par ailleurs le groupe G agit sur lui même par multiplication à droite et dans un groupe les opérations de multiplication à droite et à gauche commutent (c'est l'associativité) donc G agit à droite sur l'espace total du fibré P en préservant les fibres, librement et transitivement sur chaque fibre. La structure obtenue est celle d'un *fibré principal*.

Étant donné un fibré principal P de groupe de structure G il est toujours possible de construire un fibré $\mathrm{Ad}(P)$ comme $P \times_G \mathfrak{g}$, où G agit à droite sur P et à gauche sur $\mathfrak{g}$ par Ad. La sections 5 de l'article développe la théorie des connexions et courbures sur un fibré principal P et son lien avec $\mathrm{Ad}(P)$. Une *connexion* sur P est une forme différentielle $\omega \in \mathcal{A}^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ satisfaisant certaines conditions ; sa courbure est

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \mathcal{A}^2(P) \otimes \mathfrak{g}.$$

Une *transformation de jauge* est un automorphisme du fibré $f : P \to P$ qui commute avec l'action à droite : $f(p.g) = f(p).g$ pour $p \in P, g \in G$. L'ensemble des transformations de jauge agit par tiré en arrière sur l'espace des connexions. La connexion ω permet de réaliser le transport parallèle, qui est un relèvement des chemins par rapport à une connexion. L'opération d'automorphisme de la fibre obtenue prend le nom d'*holonomie*. Dans le cas où la connexion est plate (sa courbure ci-dessus est nulle) ceci est la même chose que la monodromie. Ainsi apparaît le lien entre les représentations du groupe fondamental, les fibrés principaux et l'équation de Maurer-Cartan dans une algèbre de Lie.

Dans le cas qui nous intéresse P est obtenu par l'action à gauche de Γ sur G via ρ et le fibré $\mathrm{Ad}(P)$ est la même chose que ce que nous avons appelé $\mathrm{Ad}(\rho)$ qui vient naturellement avec une connexion plate ω. La section 6 de l'article développe la théorie des déformations pour les fibrés principaux et les connexions plates, de telle façon qu'une représentation $\tilde{\rho} : \Gamma \to G(A)$ au dessus de ρ corresponde à un fibré principal P_A de groupe de structure $G(A)$ avec une projection $P_A \to P$. Les auteurs définissent un foncteur en groupoïdes $A \mapsto \mathscr{F}(\omega, A)$ dont les objets sont les connexions plates sur P_A au dessus de ω et les morphismes sont donnés par l'action des transformations de jauge de P_A au dessus de P. Ils montrent ensuite que ce groupoïde est équivalent à $A \mapsto \mathscr{R}(\rho, A)$ via l'holonomie (proposition 6.3) et à $A \mapsto \mathscr{C}(L, A)$ via l'équation de Maurer-Cartan pour la courbure d'une connexion (proposition 6.6).

Nous sommes intéressés par le foncteur $A \mapsto \mathrm{Obj}(\mathscr{R}(\rho, A))$ plus que par le groupoïde $\mathscr{R}(\rho, A)$. Pour s'y ramener, on choisit un point-base $x \in X$. On note

$$\begin{aligned} \varepsilon_x : \mathcal{A}^*(X, \mathrm{Ad}(\rho)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \in \mathcal{A}^0(X, \mathrm{Ad}(\rho)) &\longmapsto f(x) \\ \omega \in \mathcal{A}^q(X, \mathrm{Ad}(\rho)), q > 0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

et on pose $L' = \mathcal{A}^*(X, \mathrm{Ad}(\rho))_x := \mathrm{Ker}(\varepsilon_x)$. Fixer un point-base revient à travailler avec le groupoïde discret $\mathrm{Obj}(\mathscr{R}(\rho, A))$ (i.e. à ne pas tenir compte des conjugaisons de représentations) et on obtient le résulat :

Théorème 6.1.2 ([GM88, corollaires 6.4 et 6.7]). *Les groupoïdes $A \mapsto \mathrm{Obj}(\mathscr{R}(\rho, A))$ et $A \mapsto \mathscr{C}(L', A)$ sont équivalents, fonctoriellement en A. En conséquence, les foncteurs $A \mapsto \mathrm{Obj}(\mathscr{R}(\rho, A))$ et $A \mapsto \mathrm{Iso}(\mathscr{C}(L', A))$ sont isomorphes.*

6.2 Formalité des algèbres différentielles graduées

Pour conclure, les idées proviennent de l'article [DGMS75] sur l'algèbre de De Rham des variétés kählériennes compactes. Nous écrivons les définitions pour les algèbres de Lie différentielles graduées mais elles s'écrivent exactement de la même façon pour les algèbres commutatives différentielles graduées, ce qui est le cas étudié dans [DGMS75].

Définition 6.2.1. Soient L, L' deux algèbres de Lie différentielles graduées et $\varphi : L \to L'$ un morphisme. On dit que f est un *i-quasi-isomorphisme* si l'application induite en cohomologie $\varphi : H^j(L) \to H^j(L')$ est un isomorphisme pour tout $j \leq i$ et est injective pour $j = i+1$. On dit que f est un *quasi-isomorphisme* si l'application induite est un isomorphisme en tout degré. Les algèbres L, L' sont dites *i-quasi-équivalentes* (resp. *quasi-équivalentes*) s'il existe une suite d'algèbres de Lie et des morphismes

$$L \longrightarrow L_1 \longleftarrow L_2 \longrightarrow \cdots \longleftarrow L_m \longrightarrow L'$$

qui sont des i-quasi-isomorphismes (resp. quasi-isomorphismes). L'algèbre de Lie L est dite *formelle* si L est quasi-équivalente à une algèbre de Lie différentielle graduée de différentielle nulle (de façon équivalente, est quasi-équivalente à son algèbre de cohomologie).

Le premier théorème important, dont la démonstration est très technique et purement algébrique, est :

Théorème 6.2.2 ([GM88, théorème 2.4]). *Si $\varphi : L \to L'$ est un 1-quasi-isomorphisme alors φ induit une équivalence de groupoïdes $\varphi_* : \mathscr{C}(L, A) \to \mathscr{C}(L', A)$ fonctoriellement en A.*

Rappelons aussi le résultat de [DGMS75] :

Théorème 6.2.3 ([DGMS75, théorème principal]). *Si X est une variété kählérienne compacte, l'algèbre différentielle graduée $\mathcal{A}^*(X, \mathbb{R})$ est formelle.*

La démonstration ne consiste qu'en quelques calculs avec le lemme dd^c qui est une version réelle du lemme $\partial\bar{\partial}$, avec $d^c = -i(\partial - \bar{\partial})$. Mais l'interprétation qui en est faite, d'après les idées de la théorie de l'homotopie rationnelle, est que le type d'homotopie réelle d'une variété kählérienne compacte est entièrement déterminé par son algèbre de cohomologie.

On fixe maintenant une variété kählerienne compacte X et une représentation ρ dont l'image est contenue dans un sous-groupe compact de G (a fortiori, ρ d'image finie). Les mêmes idées de démonstration s'appliquent à l'algèbre $L' := \mathcal{A}^*(X, \mathrm{Ad}(\rho) \otimes \mathbb{C})_x$ obtenue par monodromie : comme on l'a déjà vu on peut étendre la différentielle extérieur habituelle d en une connexion plate, et en fait ici on peut aussi étendre les opérateurs habituels $\partial, \bar{\partial}, \Delta$ des variétés kählériennes. Il n'est alors pas très difficile de montrer que :

Théorème 6.2.4 ([GM88, corollaire 7.6])**.** *L'algèbre L' ci-dessus est formelle.*

Théorème 6.2.5 ([GM88, théorème 3.5])**.** *Dans ce cas-là, le foncteur $A \mapsto \mathrm{Iso}(\mathscr{C}(L', A))$ est pro-représenté par un cône quadratique. C'est même exactement le cône du théorème 5.6.7 sur les déformations à l'ordre 2 dans la variété des représentations.*

Nous avons tous les théorèmes pour conclure : via l'équivalence des théories de la déformation, le foncteur $A \mapsto \mathrm{Iso}(\mathscr{C}(L', A))$ est le foncteur associé au germe analytique de ρ.

Théorème 6.2.6 ([GM88, théorème 1])**.** *Le germe de ρ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est analytiquement isomorphe à un cône quadratique.*

7 Théorie de Hodge

Nous avons maintenant fini d'étudier l'article de Goldman-Millson et il est temps de passer à Kapovich-Millson [KM98]. Pour cela il faut en savoir plus sur la théorie de Hodge. Ce sera l'occasion de faire quelques rappels sur les variétés kählériennes compactes, que nous avons déjà utilisées.

7.1 Variétés kählériennes compactes

Commençons par revoir quelques propriétés des variétés kählériennes compactes. Ces notions sont bien expliquées dans les livres de Huybrechts [Huy04], Voisin [Voi02] et Griffiths-Harris [GH78].

Soit X une variété complexe de dimension n, i.e. un espace topologique séparé localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et dont les changements de carte sont holomorphes, qu'on supposera toujours connexe. On note TX le fibré tangent holomorphe dont les cocycles sont les jacobiens holomorphes, $T_{\mathbb{R}}X$ le fibré tangent de la variété réelle X et $T_{\mathbb{C}}X$ le fibré complexe $T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$. La multiplication par i sur TX induit sur $T_{\mathbb{R}}X$ une structure presque-complexe qu'on note I. On peut décomposer $T_{\mathbb{C}}X$ en $T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$ où $T^{1,0}X$ est naturellement la même chose que le fibré tangent holomorphe ; d'autre part $T^{1,0}X$ est isomorphe à $T_{\mathbb{R}}X$ par l'application partie réelle. Le faisceau des formes différentielles de degré k à valeur complexe, noté $\mathcal{A}_X^k(\mathbb{C})$, se décompose en la somme directe de termes $\mathcal{A}_X^{p,q}$ correspondant aux formes différentielles de type (ou bidegré) (p, q). La différentielle extérieure d se décompose en $d = \partial + \bar{\partial}$ où ∂ est de bidegré $(1, 0)$ et $\bar{\partial}$ est de bidegré $(0, 1)$ avec les relations

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial.$$

Les fibré des formes différentielles holomorphes de degré p est $\Lambda^p T^*X$, dont le faisceau des sections est noté Ω_X^p. Une forme holomorphe de degré p est la même chose qu'une forme de bidegré $(p, 0)$ et $\bar{\partial}$-fermée. On note $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes, c'est la même chose que Ω_X^0.

Une *métrique hermitienne* h sur X est une section $\mathcal{C}^\infty$ de $T^*X \otimes \overline{T^*X}$ qui est une métrique hermitienne sur chaque fibre T_xX. La partie réelle d'une métrique hermitienne h est une métrique riemannienne sur $T_{\mathbb{R}}X$ et sa partie imaginaire est une forme différentielle de degré 2 et de type $(1, 1)$ réelle.

Définition 7.1.1. La métrique h est *kählérienne* si la forme $\omega := -\mathrm{Im}(h)$ est fermée. La variété X est *kählérienne* si X admet une métrique kählérienne.

Exemple 7.1.2.

- Le quotient d'une variété kählérienne X par un groupe G qui agit proprement et librement par isométries holomorphes est naturellement une variété kählérienne. Par exemple un tore $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$.
- Toute sous-variété d'une variété kählérienne est kählérienne pour la métrique induite.

— Sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ on peut construire une métrique kählérienne appelée *métrique de Fubini-Study*. En particulier toute variété complexe projective est kählérienne.

Soit X une variété complexe compacte avec une métrique hermitienne h. On peut définir un produit scalaire sur les formes différentielles par

$$(\alpha, \beta) := \int_X h(\alpha, \beta). \operatorname{vol}$$

où vol est la forme volume. Ce produit scalaire permet d'introduire les adjoints $d^*, \partial^*, \bar{\partial}^*$ des opérateurs $d, \partial, \bar{\partial}$. Les laplaciens associés sont alors

$$\Delta := dd^* + d^*d, \quad \Delta_\partial := \partial\partial^* + \partial^*\partial, \quad \Delta_{\bar{\partial}} := \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial},$$

Δ est de degré 0 et les deux autres sont de bidegré $(0,0)$. Une forme différentielle α est dite Δ-*harmonique* (resp. Δ_∂-harmonique, $\Delta_{\bar{\partial}}$-harmonique) si $\Delta(\alpha) = 0$ (resp. $\Delta_\partial(\alpha) = 0$, $\Delta_{\bar{\partial}}(\alpha) = 0$). Une forme est Δ-harmonique si et seulement si elle est d-fermée et d^*-fermée (de même avec Δ_∂ ou $\Delta_{\bar{\partial}}$). Le théorème de Hodge provient de l'analyse des opérateurs elliptiques sur une variété compacte.

Théorème 7.1.3 (Hodge). *Si X est une variété hermitienne compacte il existe une décomposition orthogonale*

$$\mathcal{A}^k(X, \mathbb{C}) = \operatorname{Ker}(\Delta) \oplus \operatorname{Im}(\Delta). \tag{20}$$

La même décomposition existe pour $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ avec chacun des opérateurs Δ_∂ et $\Delta_{\bar{\partial}}$. Une forme α s'écrit donc uniquement $\alpha = \beta + dd^*\gamma + d^*d\gamma$ avec β harmonique ; la forme α est fermée si et seulement si $d^*d\gamma = 0$. En particulier chaque classe de cohomologie de $H^k(X, \mathbb{C})$ admet un unique représentant harmonique.

Si maintenant la métrique sur X est kählérienne, les opérateurs différentiels vérifient des relations particulières

$$\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta, \quad \partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial = 0. \tag{21}$$

Ces relations prouvent que le laplacien Δ est homogène de bidegré $(0,0)$ et donc la décomposition (20) respecte le bidegré des formes ; elles permettent de montrer deux résultats importants pour la section suivante.

Théorème 7.1.4 (Lemme $\partial\bar{\partial}$). *Soit X une variété kählérienne compacte. Si $\alpha \in \mathcal{A}^k(X, \mathbb{C})$ est ∂-fermée et $\bar{\partial}$-fermée, et si α est d-exacte ou ∂-exacte ou $\bar{\partial}$-exacte, alors α est $\partial\bar{\partial}$-exacte.*

Nous signalons ce lemme mais nous ne l'utiliserons pas tout de suite. En identifiant les classes de cohomologie et les formes harmoniques on démontre :

Théorème 7.1.5 (Décomposition de Hodge de la cohomologie). *Soit X une variété kählérienne compacte. Il existe une décomposition*

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \quad \textit{avec } \overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$$

où $H^{p,q}(X) \subset H^k(X)$ est l'ensemble des classes de cohomologie admettant un représentant harmonique de type (p,q). Cette décomposition ne dépend pas du choix de la métrique kählérienne : $H^{p,q}$ est aussi l'ensemble des classes de cohomologie admettant un représentant de type (p,q) fermé.

Démonstration. D'abord on fixe une métrique kählérienne. Une classe de cohomologie de degré k se représente alors par une unique forme harmonique (en particulier fermée) β de degré k. Puis β se décompose en bidegrés $\beta = \sum \beta^{p,q}$. Or grâce aux relations (21) le laplacien Δ est bihomogène et donc $\Delta(\beta) = 0$ implique $\Delta(\beta^{p,q}) = 0$, en particulier $\beta^{p,q}$ est fermée. Ceci est la première description de $H^{p,q}$. Notons $K^{p,q} \subset H^k(X, \mathbb{C})$ l'ensemble des classes de cohomologie admettant un représentant fermé de type (p,q), on a déjà $H^{p,q} \subset K^{p,q}$. Réciproquement soit α est une forme fermée de type (p,q). Grâce au théorème de Hodge on écrit $\alpha = \beta + \Delta\gamma$ où β est harmonique, et a priori β et γ ont chacun leur décomposition en type (p,q). Mais comme Δ est bihomogène et α est de bidegré (p,q) on a $\alpha = \beta^{p,q} + \Delta\gamma^{p,q}$ avec $\beta^{p,q}$ harmonique. On écrit $\Delta\gamma^{p,q} = dd^*\gamma^{p,q} + d^*d\gamma^{p,q}$ qui doit être fermée car α et $\beta^{p,q}$ le sont, donc $d^*d\gamma^{p,q} = 0$ et ainsi $\alpha = \beta + d(d^*\gamma^{p,q})$ donc α est cohomologue à une unique forme harmonique (p,q) et $K^{p,q} \subset H^{p,q}$. ∎

Enfin rappelons :

Théorème 7.1.6 (Lemme de Dolbeault)**.** *Soit X une variété complexe. Si α est une forme différentielle $\bar{\partial}$-fermée alors α est localement $\bar{\partial}$-exacte. En conséquence le* complexe de Dolbeault

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots$$

est une résolution du faisceau Ω_X^p et la cohomologie des sections globales calcule $H^q(X, \Omega_X^p)$.

D'autre part, si X est compacte hermitienne alors par la théorie des formes harmoniques $H^q(X, \Omega_X^p)$ s'identifie à l'ensemble des formes $\Delta_{\bar{\partial}}$-harmoniques sur X de bidegré (p, q) et si X est en plus kählérienne ceci s'identifie à $H^{p,q}(X)$.

7.2 Théorie de Hodge pure

Nous allons reformuler les théorèmes précédent avec le vocabulaire de la théorie de Hodge selon Deligne [Del71], mais expliquée plus concrètement comme Voisin [Voi02]. Nous n'aurons pas nécessairement besoin de tous les résultats ; mais ils constituent les théorèmes fondamentaux de la théorie de Hodge (dite *pure*) et ce point de vue permettra d'aborder plus facilement la théorie de Hodge *mixte* à la section d'après. Pour l'algèbre homologique on renvoie vers Godement [God58] et pour la théorie de Hodge on peut aussi consulter El Zein [EZ91] et Peters-Steenbrink [PS08].

Rappelons que dans n'importe quelle catégorie abélienne, une *filtration décroissante* d'un objet A est une suite de sous-objets $(F^n(A))_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que si $n \leq m$ alors $F^n(A) \supset F^m(A)$ (l'inclusion est synonyme de sous-objet). La filtration est dite *finie* si $F^n(A) = 0$ pour n assez grand et $F^n(A) = A$ pour n assez petit. Le *gradué associé* est $\mathrm{Gr}_F^n(A) := F^n(A)/F^{n+1}(A)$. Un morphisme d'objets filtrés $f : A \to B$ est un morphisme f tel que $f(F^n(A)) \subset F^n(B)$ pour tout n ; f induit alors un morphisme d'objets gradués $\mathrm{Gr}(f) : \mathrm{Gr}_F(A) \to \mathrm{Gr}_F(B)$. Les filtrations considérées seront toujours finies et elles seront a priori décroissantes. Une filtration sur un objet A induit naturellement un filtration sur les sous-objets de A et sur les quotients de A ; une filtration sur un complexe induit naturellement une filtration sur sa cohomologie.

Définition 7.2.1. Si $f : (A, F) \to (B, F)$ est un morphisme d'objets filtrés, on dit que f est *strictement compatible* à la filtration (ou : strict) si

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(A) \cap F^n(B) = f(F^n(A)).$$

Soit X une variété complexe. Sur le faisceau $\mathcal{A}_X^k(\mathbb{C})$ on introduit la *filtration de Hodge*

$$F^p\mathcal{A}_X^k(\mathbb{C}) := \bigoplus_{r+s=k, r\geq p} \mathcal{A}_X^{r,s}.$$

Localement une forme dans $\mathcal{A}_X^{r,s}$ s'écrit avec r termes dz et s termes $d\bar{z}$ donc les formes dans $F^p\mathcal{A}_X^k(\mathbb{C})$ sont celles qui s'écrivent avec au moins p termes dz. La différentielle d est bien évidement compatible avec la filtration de Hodge, i.e. $d(F^p\mathcal{A}_X^k(\mathbb{C})) \subset F^p\mathcal{A}_X^{k+1}(\mathbb{C})$. La filtration sur $\mathcal{A}_X^k(\mathbb{C})$ induit une filtration sur $\mathcal{A}^k(X, \mathbb{C})$. Le premier résultat important, prouvé par la théorie harmonique, est :

Théorème 7.2.2 ([Voi02, proposition 7.5])**.** *Si X est une variété kählérienne compacte, la différentielle d est un morphisme strict pour la filtration de Hodge sur $\mathcal{A}^*(X, \mathbb{C})$, c'est à dire*

$$F^p\mathcal{A}^{k+1}(X, \mathbb{C}) \cap d(\mathcal{A}^k(X, \mathbb{C})) = d(F^p\mathcal{A}^k(X, \mathbb{C})).$$

La filtration de Hodge F induit une *filtration conjuguée* $\overline{F}$ qu'on peut décrire de deux façon

$$\overline{F}^q\mathcal{A}_X^k := \overline{F^q\mathcal{A}_X^k} = \bigoplus_{r+s=k, s\geq p} \mathcal{A}_X^{r,s}$$

grâce à laquelle on peut retrouver la décomposition de Hodge. Nous allons étudier un instant cette structure algébrique.

Filtrations opposées On fixe un objet A d'une catégorie abélienne muni de deux filtrations F et $\overline{F}$ et un entier k.

Définition 7.2.3 ([Del71]). Les filtrations $F, \overline{F}$ sur A sont dites k-opposées si $\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q(A) = 0$ pour $p + q \neq k$.

Si l'objet A admet une bigraduation $A^{p,q}$ telle que $A^{p,q} = 0$ si $p + q \neq k$ et $A^{p,q} = 0$ sauf pour un nombre fini de couples (p, q) alors on définit deux filtrations k-opposées

$$F^p(A) := \bigoplus_{r \geq p} A^{r,s}, \quad \overline{F}^q(A) := \bigoplus_{s \geq q} A^{r,s}.$$

On vérifie aisément que si $p + q = k + 1$ alors $F^p(A) \oplus \overline{F}^q(A) = A$, et que $F^p(A) \cap \overline{F}^q(A) = A^{p,q}$ si $p + q = k$ et 0 si $p + q \neq k$.

Théorème 7.2.4 ([Del71, proposition 1.2.5]). *Les filtrations F et $\overline{F}$ sont k-opposées si et seulement si*

$$\forall p, q, \quad p + q = k + 1 \Longrightarrow F^p(A) \oplus \overline{F}^q(A) \simeq A.$$

Dans ce cas, on pose $A^{p,q} := F^p(A) \cap \overline{F}^q(A)$ pour $p + q = k$ et $A^{p,q} = 0$ si $p + q \neq k$. Alors A est un objet bigradué et les filtrations $F, \overline{F}$ sont les deux filtrations comme ci-dessus.

La filtration de Hodge F est bien sûr k-opposée à sa filtration conjuguée $\overline{F}$. Remarquons que sur n'importe quel $\mathbb{Z}$-module ou $\mathbb{Q}$-module H avec une filtration F sur $H_{\mathbb{C}} := H \otimes \mathbb{C}$ et on peut définir une filtration conjuguée $\overline{F}^q := \overline{F^p(H_{\mathbb{C}})}$.

Définition 7.2.5. Une *$\mathbb{Z}$-structure de Hodge* de poids k est la donnée d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini $H_{\mathbb{Z}}$ appelé le *réseau* et d'une filtration F sur $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ tels que les filtrations $F, \overline{F}$ soient k-opposées. Autrement dit la filtration F induit une décomposition

$$H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}, \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}.$$

On parle que *$\mathbb{Q}$-structure de Hodge* (resp. *$\mathbb{R}$-structure de Hodge*) si le réseau est un $\mathbb{Q}$-module (resp. $\mathbb{R}$-module) libre de type fini.

Le théorème de décomposition de Hodge montre exactement que la cohomologie en degré k d'une variété kählérienne compacte X porte une structure de Hodge de poids k et de réseau $H^k(X, \mathbb{Z})$ qui sera toujours vu comme inclus dans $H^k(X, \mathbb{Q})$, donc considéré modulo torsion. Deligne démontre que la catégorie des stuctures de Hodge est abélienne.

Suites spectrales et hypercohomologie Sur une variété complexe X, la filtration de Hodge sur $\mathcal{A}^*(X, \mathbb{C})$ induit une suite spectrale appelée *suite spectrale de Frölicher*. Le terme $E_0^{p,q}$ est simplement $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ et la différentielle d_0 est $\bar{\partial}$. Le terme $E_1^{p,q}$ est donc, via le lemme de Dolbeault, $H^q(X, \Omega_X^p)$. La suite converge vers $E_\infty^{p,q} = \mathrm{Gr}_F^p H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ pour la filtration induite par F sur $H^k(X, \mathbb{C})$. Le théorème suivant fait aussi partie des résultats fondamentaux de la théorie de Hodge.

Théorème 7.2.6. *Si X est une variété kählérienne compacte, la suite spectrale de Frölicher dégénère en E_1.*

Démonstration. On peut le voir comme une conséquence de la décomposition de Hodge. Dans une suite spectrale $E_{r+1}^{p,q} \simeq H(E_r^{p,q})$ donc $\dim E_{r+1}^{p,q} \leq \dim E_r^{p,q}$ et la dégénérescence en E_1 signifie que $E_1^{p,q} = E_2^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q}$, ce qui est équivalent à l'égalité des dimensions. Or grâce à la décomposition de Hodge

$$\sum_{p+q=k} \dim E_\infty^{p,q} = \dim H^k(X, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=k} \dim H^{p,q}(X) = \sum_{p+q=k} \dim E_1^{p,q}$$

ce qui conduit à l'égalité $\dim E_\infty^{p,q} = \dim E_1^{p,q}$. $\square$

En fait Deligne montre ([Del71, proposition 1.3.2]) qu'en général la dégénérescence en E_1 de la première suite spectrale d'un complexe double est équivalente à la compatibilité stricte de la différentielle avec la première filtration. Notre preuve montre que c'est aussi équivalent à une décomposition $H^k = \bigoplus H^{p,q}$ avec $H^{p,q} \simeq E_1^{p,q}$ mais sans impliquer $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$.

Enfin introduisons la dernière notion, qui servira elle aussi à éclairer la théorie de Hodge mixte. Soit X une variété complexe.

Définition 7.2.7. Le *complexe de De Rham holomorphe* est le complexe de faisceaux (noté Ω_X^*)

$$0 \xrightarrow{\partial} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\partial} \Omega_X^1 \xrightarrow{\partial} \Omega_X^2 \xrightarrow{\partial} \cdots$$

et le faisceau constant $\mathbb{C}$ s'inclut naturellement dans $\mathcal{O}_X$.

Nous allons montrer que ce complexe est localement exact, donc que c'est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$. Mais contrairement au complexe de Dolbeaut, celui-ci n'est pas composé d'objets acycliques pour le foncteur des sections globales donc on ne peut pas espérer calculer $H^k(X, \mathbb{C})$ à partir de la cohomologie du complexe des sections globales de Ω_X^*. On va calculer son *hypercohomologie* $\mathbb{H}^*(X, \Omega_X^*)$.

Pour cela il faut choisir un complexe de faisceau $\mathcal{F}^*$ acyclique pour le foncteur des sections globales avec un morphisme de complexes de faisceaux $i : \Omega_X^* \to \mathcal{F}^*$ qui induit un isomorphisme en cohomologie (de complexes de faisceaux). L'hypercohomologie en degré k est alors $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^*) := H^k(\mathcal{F}^*(X))$.

Théorème 7.2.8. *Le complexe de De Rham usuel $\mathcal{A}_X^*(\mathbb{C})$, avec l'inclusion canonique $\Omega_X^* \hookrightarrow \mathcal{A}_X^*(\mathbb{C})$, est une résolution du complexe de De Rham holomorphe. En conséquence le complexe de De Rham holomorphe est localement exact et c'est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$. Son hypercohomologie $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^*)$ est isomorphe à la cohomologie de De Rham $H^k(X, \mathbb{C})$.*

Démonstration. C'est exactement une reformulation du lemme de Dolbeaut et du lemme de Poincaré. On ajoute d'abord Ω_X^p au complexe double $\mathcal{A}_X^{p,q}$ comme une ligne de degré -1. Dans ce complexe double augmenté les colonnes sont localement exactes en degré positif (c'est le lemme de Dolbeaut) et donc la cohomologie totale de $\mathcal{A}_X^{p,q}$ est isomorphe à la cohomologie de la ligne Ω_X^p (on peut le voir directement en raisonnant avec des zigzags dans le complexe double comme [Voi02, lemme 8.5] ou [BT82, proposition 8.8] ; ou avec la première suite spectrale [God58, théorème 4.8.1]). Mais la cohomologie totale de $\mathcal{A}_X^{p,q}$ est exactement celle de $\mathcal{A}_X^k(\mathbb{C})$ donc le complexe de De Rham usuel est une résolution de Ω_X^* qui lui est quasi-isomorphe.

D'une part ceci implique que Ω_X^* est localement exact car $\mathcal{A}_X^*(\mathbb{C})$ l'est (c'est le lemme de Poincaré usuel). D'autre part cela signifie que l'hypercohomologie $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^*)$ peut être calculé comme la cohomologie en degré k du complexe $\mathcal{A}^*(X, \mathbb{C})$ et ceci est exactement la cohomologie de De Rham $H^*(X, \mathbb{C})$. $\square$

Sur le complexe Ω_X^* on introduit la *filtration bête* : $\sigma_{\geq p}\Omega_X^*$ est le complexe tronqué tel que $\sigma_{\geq p}\Omega_X^r$ est nul si $p > r$ et égal à Ω_X^r si $p \leq r$.

Proposition 7.2.9. *Via l'isomorphisme $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^*) \simeq H^k(X, \mathbb{C})$ la filtration bête $\sigma_{\geq p}\Omega_X^*$ induit une filtration sur $H^k(X, \mathbb{C})$ qui est exactement la filtration de Hodge.*

Démonstration. C'est évident en reprenant la preuve précédente : quand on augmente $\mathcal{A}_X^{p,q}$ par la ligne Ω_X^p, le sous-complexe $\sigma_{\geq p}\Omega_X^*$ est une augmentation de $F^p\mathcal{A}_X^k(\mathbb{C})$. $\square$

7.3 Théorie de Hodge mixte

Le but de la théorie de Hodge mixte est d'étudier la structure sur la cohomologie d'une variété algébrique complexe plus générale qu'une variété kählérienne compacte. Nous continuons donc le travail de la section précédente.

Rappelons que sur une variété complexe X les anneaux locaux de fonctions holomorphes $\mathcal{O}_{X,x}$ sont factoriels qu'on a une notion de diviseur exactement comme en géométrie algébrique, sans distinction entre les diviseurs de Weil et de Cartier. Par exemple si $g(z) = 0$ est une équation locale d'une hypersurface Y, dire qu'une fonction holomorphe f a un zéro d'ordre k le long de Y signifie que localement f est un multiple de g^k ; dire que la fonction f a un pôle d'ordre k de long de Y signifie que localement $g^k f$ s'étend en une fonction holomorphe.

Définition 7.3.1. Un *diviseur à croisements normaux* est un diviseur D sur X tel que localement il existe des coordonnées z_i $(i = 1, \ldots, n)$ et un entier r tel que D a pour équation $z_1 \cdots z_r = 0$.

Autrement dit D est localement l'intersection transverse de r hypersurfaces. On fixe maintenant une variété kählérienne compacte X de dimension n et un diviseur à croisements normaux $D \subset X$ (seul le support de D nous intéresse). On note $U := X \setminus D$ la variété ouverte et $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion. On peut montrer via la résolution des singularités que toute variété algébrique complexe quasi-projective (i.e. ouvert d'une variété projective) est isomorphe à un ouvert U comme ci-dessus et alors X est une *compactification* de U ; on va s'intéresser à la structure sur $H^k(U, \mathbb{C})$.

Définition 7.3.2. Une forme différentielle holomorphe ω sur U est dite *à pôles logarithmiques* le long de D si ω et $d\omega$ ont un pôle d'ordre au plus 1 le long de D. Le *complexe logarithmique* $\Omega_X^*(\log D)$ est le complexe des formes à pôles logarithmiques le long de D avec la différentielle ∂.

Dans des coordonnées locales z_i telles que $D = \{z_1 \cdots z_r = 0\}$ une forme $\omega \in \Omega_X^k(\log D)$ s'écrit

$$\omega = f(z) dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_s} \wedge \frac{dz_{j_1}}{z_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_{j_t}}{z_{j_t}}$$

avec $\{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $\{j_1, \ldots, j_t\} \subset \{1, \ldots, r\}$, $s + t = k$ et f holomorphe (localement, sur X). Autrement dit :

Lemme 7.3.3. *Chaque terme $\Omega_X^k(\log D)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libre de rang k, localement engendré par les produits extérieurs de k termes dz_i $(i = 1, \ldots, n)$ et dz_i/z_i $(i = 1, \ldots, r)$ tels que localement $D = \{z_1 \cdots z_r = 0\}$.*

De plus le complexe $\Omega_X^*(\log D)$ est un sous-complexe de $j_*\Omega_U^*$ et donc aussi de $j_*\mathcal{A}_U^*$. Par définition, pour tout ouvert V de X, $j_*\Omega_U^k(V) = \Omega_X^k(U \cap V)$.

Théorème 7.3.4 ([Voi02])**.** *L'inclusion $\Omega_X^*(\log D) \hookrightarrow j_*\mathcal{A}_U^*$ est un isomorphisme en cohomologie (des complexes de faisceaux). En conséquence l'hypercohomologie $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^*(\log D))$ est isomorphe à l'hypercohomologie $\mathbb{H}^k(X, j_*\Omega_U^*)$ et ceci est $H^k(U, \mathbb{C})$.*

Sur le complexe $\Omega_X^*(\log D)$ il existe encore la filtration bête $\sigma_{\geq p}$ comme dans le complexe de De Rham holomorphe. On l'appelle la *filtration de Hodge* et on la note F^p. Il existe une autre filtration *croissante* qu'on note W_r et qu'on appelle *filtration par le poids*. Les éléments de $W_r\Omega_X^*(\log D)$ sont les formes différentielles qui s'écrivent localement avec au plus r termes dz/z, en particulier $W_0\Omega_X^*(\log D) = j_*\Omega_U^*$. On peut toujours se ramener à une filtration décroissante en posant $W^{-r} := W_r$. Revenons un court instant sur la structure algébrique.

Définition 7.3.5. Une *structure de Hodge mixte* est la donnée d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini $H_{\mathbb{Z}}$, d'une filtration croissante W sur $H_{\mathbb{Q}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ et d'une filtration décroissante F sur $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ tels que sur le gradué $\mathrm{Gr}_s^W(H_{\mathbb{Q}})$ la filtration F induit une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge de poids s.

Si W est la filtration par le poids on note $W[k]$ la *filtration décalée* c'est à dire $W[k]_s := W_{s-k}$.

Théorème 7.3.6 (Deligne, [Del71, théorème 3.2.5])**.** *Les filtrations F et $W[k]$ sur $\Omega_X^*(\log D)$ induisent des filtrations sur l'hypercohomologie $\mathbb{H}^k(X, \Omega_X^*(\log D))$ et via l'isomorphisme du théorème 7.3.4 les filtrations F et $W[k]$ induisent sur $H^k(U, \mathbb{Z})$ une structure de Hodge mixte.*

On peut montrer que cette structure sur la cohomologie existe pour toute variété algébrique complexe lisse, indépendament du choix d'une compactification.

Exemple 7.3.7. Dans le cas où on a déjà $U = X$, les termes $W_r\Omega_X^*(\log D)$ sont nuls en degré $r < 0$ et égaux à $\Omega_X^*(\log D)$ en degré $r \geq 0$. La filtration $W[k]$ induite sur $H^k(U, \mathbb{C})$ est telle que $\mathrm{Gr}_k^{W[k]} = H^k(U, \mathbb{C})$ et les autres termes du gradué sont nuls. On retrouve exactement le cas du complexe de De Rham holomorphe, et la filtration F induit sur $H^k(U, \mathbb{C})$ une structure de Hodge pure de poids k.

8 Résumé de l'article de Kapovich-Millson

Dans le même style que la section sur Goldman-Millson, nous allons résumer de façon peu formelle l'article de Kapovich-Millson [KM98] dans le but d'expliquer le théorème 1.0.2 ; toutes les autres références sont des références à [KM98]. Nous avons déjà tous les outils pour en comprendre l'énoncé.

8.1 Arrangements et représentations

L'article contient de nombreux résultats très techniques de théorie des groupes dont nous n'avons pas du tout besoin et nous allons les expliquer rapidement sans aucune définition précise. Le but est d'étudier une correspondance entre trois types d'objets : les arrangements, les représentations des groupes d'Artin et les schémas affines de type fini sur $\mathbb{Q}$.

Arrangements Tout d'abord un *arrangement projectif* est la donnée d'un ensemble de droites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Un *arrangement abstrait* est la donnée de deux ensembles, l'un appelé ensemble des droites et l'autre ensemble des points, et d'une *relation d'incidence* qui signifie « un point appartient à une droite ». En particulier un arrangement projectif peut être vu comme un arrangement abstrait. Une *réalisation* d'un arrangement abstrait A est un morphisme (i.e. une application qui envoie des points sur des points, des droites sur des droites et préserve la relation d'incidence) de A vers un arrangement projectif.

Étant donné un arrangement abstrait A, et par des idées analogues à la construction de la variété des représentations d'un groupe de type fini, on peut mettre une structure de schéma affine de type fini sur $\mathbb{Q}$ sur l'ensemble des réalisations projectives de A. On l'appelle *variété des réalisations* de A. On peut aussi considérer des variantes en fixant un point-base, ou un arrangement de base, dans A qui doit s'envoyer sur un arrangement de base fixé dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Les auteurs expliquent dans la partie 8.7 qu'un arrangement abstrait peut être utilisé pour représenter des fonctions. Pour cela, sur un arrangement A on fixe des points d'entrée $a_1, \dots, a_n$ et des points de sortie $b_1, \dots, b_s$. Alors pour chaque réalisation projective f de l'arrangement, il se peut que l'image des points $a_1, \dots, a_n$ détermine toute la réalisation de l'arrangement via les règles de géométrie projective classique. Par exemple si b_1 est défini dans A comme étant à la fois sur une droite a_1a_2 (il n'y a pas unicité d'une telle droite) et sur une droite a_3a_4 alors $f(b_1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est nécessairement à l'intersection des droites $f(a_1)f(a_2)$ et $f(a_3)f(a_4)$, qui elles sont uniques pour peu que $f(a_1) \neq f(a_2), f(a_3) \neq f(a_4)$. En fixant un arrangement de base on peut se ramener à envoyer les points d'entrée et de sortie sur la droite affine $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

L'arrangement A est dit *fonctionnel* si la variété des réalisations de A est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ (au sens des schémas), c'est à dire que l'image des points d'entrée sur la droite affine détermine uniquement et sans contrainte toute la réalisation et en particulier les points de sortie. Il représente donc une fonction régulière $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{A}^s_{\mathbb{Q}}$.

Dans la partie 9, les auteurs montrent que toutes les opérations polynômiales usuelles peuvent être décrites par des arrangements fonctionnels. La conclusion de la partie 10 est que tout schéma affine de tye fini sur $\mathbb{Q}$ (i.e. tout système d'équations polynômiales) est isomorphe à la variété des représentations d'un arrangement. Cet arrangement n'est pas du tout unique : sa construction dépend de la façon d'écrire les équations avec les opérations élémentaires $+, -, \times, \dots$.

Représentations des groupes d'Artin Dans la section 11 les auteurs associent à tout arrangement A un graphe $\Lambda(A)$ comme dans notre section 3.2, et donc des groupes d'Artin $G^a_{\Lambda(A)}$ et de Shephard $G^s_{\Lambda(A)}$ avec le morphisme canonique surjectif $f_{\Lambda(A)} : G^a_{\Lambda(A)} \to G^s_{\Lambda(A)}$. Un grand rôle est joué par le groupe projectif orthogonal $PO(3)$, étudié à la section 6 pour les propriétés particulières des involutions de $PO(3,\mathbb{C})$ (qui est la même chose que $SO(3,\mathbb{C})$, et aussi $PO(3,\mathbb{R}) = SO(3,\mathbb{R})$) et son action sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Les auteurs développent la théorie des représentations des groupes de Shephard à valeur dans $PO(3)$ dans la section 12.1.

Jusque là nous n'avons pas parlé de la *variété des caractères* : si Γ est un groupe de type fini et G un groupe algébrique affine, on peut parfois construire un schéma noté $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)//G$ qu'on pense comme le quotient de $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ pour l'action par conjugaison.

Dans la section 12.2, à l'aide de résultats techniques de la section 7, ils montrent que si S est un schéma affine de type fini sur $\mathbb{Q}$ et 0 un point rationnel, si A est un arrangement qui représente S, il existe une représentation $\rho : G^s_{\Lambda(A)} \to PO(3,\mathbb{R})$ d'image finie telle que le germe $(S, 0)$ est analytiquement isomorphe au germe analytique de ρ dans $\mathrm{Hom}(G^s_{\Lambda}, PO(3))//PO(3)$. Ensuite dans la section 12.3 ils tirent en arrière la variété des représentations par

$$f^*_{\Lambda(A)} : \mathrm{Hom}(G^s_{\Lambda(A)}, PO(3)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G^a_{\Lambda(A)}, PO(3))$$

et montrent que dans notre cas ceci induit un isomorphisme de germes analytiques. En résumé le résultat précis est :

Théorème 8.1.1 ([KM98, théorème 1.9]). *Soit S un schéma affine de type fini sur $\mathbb{Q}$ et 0 un point rationnel. Il existe un arrangement A et une représentation $\rho : G^a_{\Lambda(A)} \to PO(3,\mathbb{R})$ d'image finie tels que le germe $(S,0)$ soit analytiquement isomorphe au germe de ρ dans $\mathrm{Hom}(G^a_{\Lambda(A)}, PO(3))//PO(3)$.*

Concrètement on retient que : n'importe quel germe analytique peut être réalisé dans la variété des caractères pour un certain groupe d'Artin et une représentation dans $PO(3,\mathbb{R}) = SO(3,\mathbb{R})$ d'image finie. Dans ce cas les restrictions sur les poids sont valables aussi dans la variété des caractères. Mais il est facile de construire des germes analytiques qui ne vérifient pas les restrictions sur les poids du théorème de Kapovich-Millson.

Théorème 8.1.2 ([KM98, théorème 1.1]). *Il existe une infinité de groupes d'Artin qui ne sont pas isomorphes à des groupes fondamentaux de variétés algébriques complexes.*

Les auteurs donnent pour exemples les groupes d'Artin associés aux germes $X^p = 0$ pour tout nombre premier $p \geq 5$.

Remarque 8.1.3 (personnelle). Leur méthode pour produire un groupe d'Artin à partir d'un germe est entièrement constructive : il doit être possible d'écrire un algorithme qui décrit un arrangement A, un graphe $\Lambda(A)$ et un groupe de présentation fini $G^a_{\Lambda(A)}$ correspondants. Mais d'une part il n'est pas toujours évident de montrer que deux germes analytiques ne sont pas isomorphes ou n'admettent pas de présentation qui fait apparaître les restrictions sur les poids ; d'autre part il n'est pas facile de calculer directement sur des présentations finies de groupes.

8.2 Structure de Hodge mixte et restriction sur les poids

Rappelons le théorème que l'on souhaite expliquer.

Théorème 8.2.1 (Kapovich-Millson). *Soit X une variété algébrique complexe lisse, Γ son groupe fondamental, G un groupe algébrique affine réductif sur $\mathbb{R}$ et $\rho : \Gamma \to G(\mathbb{R})$ une représentation d'image finie. Alors le germe de ρ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est quasi-homogène avec des générateurs de poids 1 ou 2 et des relations de poids $2, 3, 4$.*

Ce théorème est un quelque sorte un « analogue mixte »du théorème de Goldman-Millson. On commence par choisir un point-base x, on pose $\Gamma = \pi_1(X, x)$. On choisit une compactification Y telle que $Y \setminus X := D$ soit un diviseur à croisements normaux. Notons L l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathcal{A}^*(X, \mathrm{Ad}(\rho))$ obtenue par monodromie. On peut introduire des filtrations W sur L et F sur $L \otimes \mathbb{C}$ comme dans le complexe logarithmique qui donnent à L la structure d'une *algèbre de Lie différentielle graduée de Hodge mixte* réelle. Les poids sur L sont liés aux poids sur le germe analytique de ρ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$. Pour comprendre il faut lire l'article de Morgan [Mor78] et éventuellement celui de Hain [Hai98].

9 Conclusion

Il resterait encore du travail pour expliquer correctement la théorie de Kapovich-Millson et il serait intéressant de traîter des exemples concrets.

Je remercie mon directeur Philippe Eyssidieux et tous les gens qui m'ont bien accueilli cette année à Grenoble.

Références

[ABC+96] Jaume Amorós, Marc Burger, Kevin Corlette, Dieter Kotschick et Domingo Toledo : *Fundamental groups of compact Kähler manifolds.* Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 1996.

[AM69] Michael F. Atiyah et Ian G. MacDonald : *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Reading, 1969.

[Bro82] Kenneth S. Brown : *Cohomology of groups.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1982.

[BT82] Raoul BOTT et Loring W. TU : *Differential forms in algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1982.

[Del71] Pierre DELIGNE : Théorie de Hodge, II. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 40(1):5–58, 1971.

[DGMS75] Pierre DELIGNE, Phillip GRIFFITHS, John MORGAN et Dennis SULLIVAN : Real homotopy theory of Kähler manifolds. *Inventiones mathematicae*, 29(3):245–274, 1975.

[EZ91] Fouad EL ZEIN : *Structure de Hodge mixte*. Hermann, 1991.

[GH78] Phillip GRIFFITHS et Joseph HARRIS : *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, 1978.

[GM88] William M. GOLDMAN et John J. MILLSON : The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds. *Publications Mathématiques de l'IHES*, 67(1):43–96, 1988.

[God58] Roger GODEMENT : *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, 1958.

[Hai98] Richard M. HAIN : The Hodge De Rham theory of relative Malcev completion. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 31(1):47–92, 1998.

[Hat01] Allen HATCHER : *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2001.

[Hum92] James E. HUMPHREYS : *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, 1992.

[Huy04] Daniel HUYBRECHTS : *Complex geometry (an introduction)*. Universitext. Springer, 2004.

[KM98] Michael KAPOVICH et John J. MILLSON : On representation varieties of Artin groups, projective arrangements and the fundamental groups of smooth complex algebraic varieties. *Publications Mathématiques de l'IHES*, 88(1):5–95, 1998.

[Liu02] Qing LIU : *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford University Press, 2002.

[LM85] Alexander LUBOTZKY et Andy R. MAGID : *Varieties of representations of finitely generated groups*, volume 336 de *Memoirs of the American Mathematical Society*. AMS, 1985.

[Mil12] James S. MILNE : Basic theory of affine group schemes, 2012. `http://www.jmilne.org/math/`.

[Mil13] James S. MILNE : Lie algebras, algebraic groups, and Lie groups, 2013. `http://www.jmilne.org/math/`.

[ML71] Saunders MAC LANE : *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1971.

[Mor78] John W. MORGAN : The algebraic topology of smooth algebraic varieties. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 48(1):137–204, 1978.

[NR66] Albert NIJENHUIS et R.W. RICHARDSON : Cohomology and deformations in graded lie algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72:1–29, 1966.

[PS08] Chris PETERS et Joseph H.M. STEENBRINK : *Mixed Hodge structures*. Springer, 2008.

[Sch68] Michael SCHLESSINGER : Functors of Artin rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 130(2):208–222, 1968.

[Sza09] Tamás SZAMUELY : *Galois groups and fundamental groups*. Cambridge University Press, 2009.

[Voi02] Claire VOISIN : *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 2002.