Surfaces réglées

Louis - Clément

Cadre : surface = surface projective lisse / $\mathbb{C}$.

Def : S est une surface réglée si S est birationnellement isomorphe (notations : $\simeq$) à $C \times \mathbb{P}^1$ où C : courbe lisse.

Si $C = \mathbb{P}^1$: S est une surface rationnelle

Remarques :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \simeq & \mathbb{P}^2 \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 & \simeq & \mathbb{A}^2 \end{array}$$

S rationnelle $\Leftrightarrow$ $S \simeq \mathbb{P}^2$.

exemples : - $C \times \mathbb{P}^1$

si $E \to C$ fibré vectoriel de rang 2

$\mathbb{P}_C(E) \to C$ réglé

loc. si $E_{|U} \simeq U \times \mathbb{A}^1$ alors $\mathbb{P}_C(E)_{|U} \simeq U \times \mathbb{P}^1$.

Def : si C courbe lisse fixée,

S est géométriquement réglée de base C si $\exists$ morphisme lisse $p : S \to C$ tq toutes les fibres sont $\simeq \mathbb{P}^1$

Idée : ceci n'est pas une notion birationnelle, mais correspond mieux à l'intuition " par chaque point il passe une droite ".

But : montrer que géométriquement réglé $\Rightarrow$ réglé (Étape 1)

et que si $S \to C$ géométriquement réglé alors (Étape 2)

$S \simeq \mathbb{P}_C(E)$ au dessus de C.

Étape 1. théorème de Noether - Enriques

si $S \xrightarrow{p} C$ C courbe lisse, ~~B mor~~ p: morphisme,

Si il existe $x \in C$ tq p lisse au dessus de x et $p^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^1$ alors il existe $U \subset C$ tq $x \in U$ et

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Ceci implique: si $S \to C$ géométriquement réglée, l'hypothèse est vérifiée $\forall x \in C$ et donc S est un $\mathbb{P}^1$-fibré (fibré, de fibre $\mathbb{P}^1$, groupe de structure $PGL(2, \mathbb{C})$)

Remarque utile: si D diviseur effectif, C courbe irréductible tq $C^2 \geq 0$ alors $D.C \geq 0$.

Démo: On écrit $D = D' + nC$ où D' ne contient pas C. ~~alors~~ et $n \geq 0$ (car D effectif). Alors

$$D.C = D'.C + n \underbrace{C^2}_{\geq 0}$$

$D'.C \geq 0$ car $D' = \sum m_i C_i$, $m_i \geq 0$, $C_i \neq C$, $C_i . C \geq 0$

Démo du théorème

pas 1: mq $H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$.

posons $F = p^{-1}(x)$: $F^2 = 0$ (toujours vrai pour une fibre) et formule du genre $g(F) = 1 + \frac{1}{2}(F^2 + F.K)$

avec ici $F \simeq \mathbb{P}^1$, ~~et~~ $g(F) = 0$, donc $F.K = -2$

Si on avait $H^2(S, \mathcal{O}_S) \neq 0$ alors par dualité de Serre $H^0(S, \omega_S) \neq 0$. donc $|K|$ contient un diviseur effectif D. $D \sim K$ $D.F = K.F = -2$

or par la remarque utile $D.F \geq 0$ $(F^2 \geq 0)$.

contradiction ! $H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$.

pas 2, mq il existe un diviseur H sur S tq $H.F = 1$

(Remarque : si $S \to C$ est un ~~fib~~ espace fibré
F : classe d'une fibre, H : classe d'une section, alors $H.F = 1$)

Démo : f = classe de F dans $H^2(S, \mathbb{Z})$.

$H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0 \Rightarrow$ $\mathrm{Pic}(S) \to H^2(S, \mathbb{Z})$ surjectif

donc on veut mq : $\exists h \in H^2(S, \mathbb{Z})$, $h.f = 1$.

$\{a.f \mid a \in H^2(S, \mathbb{Z})\}$ sous groupe de $\mathbb{Z}$, de la forme $d\mathbb{Z}$, $d \geq 1$.

$a \mapsto \frac{1}{d}(a.f)$ est une forme linéaire sur $H^2(S, \mathbb{Z})$.

Par dualité de Poincaré $\exists f' \in H^2(S, \mathbb{Z})$ tq

$\forall a$ $(a.f') = \frac{1}{d}(a.f)$ et donc $f = df'$

Remarque : si k = classe de K dans $H^2(S, \mathbb{Z})$

$a^2 + a.k$ est pair ~~∀a~~ $\forall a \in H^2(S, \mathbb{Z})$

(en effet : vrai si a = classe de A car formule du genre

$g(A) = 1 + \frac{1}{2}(A^2 + A.K)$

et linéaire mod 2 : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a.b$)

ici $f^2 = 0$ $f \cdot k = -2$

$\Rightarrow$ $(f')^2 = 0$ $f' \cdot k = -\frac{2}{d}$ donc $d = 1$.

pas 3. lire Beauville.

Théorème. Si $S \to C$ $\mathbb{P}^1$-fibré à $S \simeq \mathbb{P}_C(E)$
pour un $E \to C$ fibré vectoriel de rang 2, au dessus de C.
Et, $\mathbb{P}_C(E) \simeq \mathbb{P}_C(E')$ (au dessus de C)
$\Leftrightarrow$ $\exists$ $L \in \mathrm{Pic}(C)$ tq $E' \simeq E \otimes L$.

Démo. rappel
fibrés en droites $\leftrightarrow$ $H^1(C, \mathcal{O}_C^*)$ (voir en cocycles de Čech)
fibrés vectoriels de rang 2 $\leftrightarrow$ $H^1(C, GL(2, \mathcal{O}_C))$
fibrés en $\mathbb{P}^1$ $\leftrightarrow$ $H^1(C, PGL(2, \mathcal{O}_C))$
$GL(2, \mathbb{C})$ et $PGL(2, \mathbb{C})$ ne sont pas des groupes abéliens mais la cohomologie de Čech marche en degré 1.
De $1 \to \mathbb{C}^* \to GL(2, \mathbb{C}) \to PGL(2, \mathbb{C}) \to 1$
on a $1 \to \mathcal{O}_C^* \to GL(2, \mathcal{O}_C) \to PGL(2, \mathcal{O}_C) \to 1$.
et donc,

$$H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \to H^1(C, GL(2, \mathcal{O}_C)) \to H^1(C, PGL(2, \mathcal{O}_C)) \to H^2(C, \mathcal{O}_C^*)$$

il suffit de mq $H^2(C, \mathcal{O}_C^*) = 0$
alors le théorème est conséquence de la suite exacte.

Or, pour n'importe quelle variété lisse T

$$1 \to \mathcal{O}_T^* \to \underbrace{\mathcal{K}_T^*}_{} \to \underbrace{\mathcal{K}_T^*/\mathcal{O}_T^*}_{} \to 1$$

faisceaux flasques

$$H^i(T, \mathcal{K}_T^*) = 0, \quad i \geq 1 \qquad H^i(T, \mathcal{K}_T^*/\mathcal{O}_T^*) = 0, \quad i \geq 1$$

donc $H^2(T, \mathcal{O}_T^*) = 0$.

Ceci ~~termine~~ conclut le but ~~en début~~ du début.

On s'intéresse maintenant aux surfaces minimales.

But : si $C \neq \mathbb{P}^1$ les surfaces géométriquement réglées sur C sont les modèles minimaux des surfaces réglées.

Rappel : S minimale $\Leftrightarrow$
– toute morphisme birationnel $S \to S'$ est un isomorphisme
$\Leftrightarrow$ S n'est pas l'éclatement d'une autre surface
$\Leftrightarrow$ S ne contient pas de courbe E tq $E \simeq \mathbb{P}^1$ et $E^2 = -1$.

Lemme : si S surface minimale $p : S \to C$ morphisme tq fibre générique $\simeq \mathbb{P}^1$, Alors S est géométriquement réglée par p.

Démo : soit F : fibre de p $\quad F^2 = 0$, ~~$F.K = -2$~~
$F \sim$ fibre $\simeq \mathbb{P}^1$ donc $F.K = -2$ ($\leftarrow$ indépendant de la fibre choisie !)
si F irréductible : formule du genre $\Rightarrow F \simeq \mathbb{P}^1$ $\quad (g(F) = 0)$
et p lisse sur F.
F n'est pas multiple car $\exists H \quad F.H = 1$.

But : mq F n'est pas ~~irréductible~~

~~Si~~ Lemme : soit $p : S \to C$ morphisme surjectif à fibres connexes, $F = \sum n_i C_i$ une fibre réductible. Alors $C_i^2 < 0$ $\forall i$.

Démo : $n_i C_i^2 = C_i \cdot \left(F - \sum_{j \neq i} n_j C_j\right)$

or, $C_i \cdot F = 0$ car ~~si on ne~~ on peut remplacer F par une autre fibre F' $F \cdot F' = 0$

si $j \neq i$ $C_i \cdot C_j \geq 0$ (intersection de courbes irréductibles) ~~et $\neq C$~~

et $\exists j$, $C_i \cdot C_j > 0$ car fibre connexe.

Fin de la démo : $F = \sum n_i C_i$ fibre réductible

formule du genre : $g(C_i) = 1 + \frac{1}{2}(C_i^2 + K \cdot C_i)$

+ lemme $\Rightarrow K \cdot C_i \geq -1$, égalité $\Leftrightarrow C_i^2 = -1$, $g(C_i) = 0$ et ceci $\Rightarrow C_i$ courbe exceptionnelle

mais S est minimale ! Donc $K \cdot C_i \geq 0$

ainsi $K \cdot F \geq 0$, contredit $K \cdot F = -2$.

Théorème : si $C \not\cong \mathbb{P}^1$ les modèles minimaux de $C \times \mathbb{P}^1$ (et donc, des surfaces réglées) sont les surfaces géométriquement réglées de base C.

Démo : d'abord mq $p : S \to C$ géométriquement réglée $\Rightarrow$ minimale.

si $E \subset S$ courbe exceptionnelle $E \neq$ fibre de p car $E^2 = -1$

$p(E) \neq$ point donc $p(E) = C$ | par définition $p(E) = \overline{p(E)}$ + irréductible

On a alors $p|_E : \underset{\simeq \mathbb{P}^1}{E} \to C$

$$\Rightarrow \quad g(C) \leq g(E) \quad \Rightarrow \quad C \simeq \mathbb{P}^1 \text{. contradiction.}$$

par exemple formule de Riemann Hurwitz

Si S surface minimale ~~$\varphi : S \to C$~~

$\varphi : S \overset{\sim}{\dashrightarrow} C \times \mathbb{P}^1$

q : projection $C \times \mathbb{P}^1 \to C$

$q \circ \varphi : S \dashrightarrow C$

alors par l'élimination des indéterminées

$$\begin{tikzcd}
 & & \hat{S} \arrow[dl, "\varepsilon_n"'] \arrow[ddr, "f"] & \\
 & \cdot \arrow[dl, "\varepsilon_1"'] & & \\
S \arrow[rrr, dashed, "q\circ\varphi"'] & & & C
\end{tikzcd}$$

(ie après les éclatements successifs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, $q \circ \varphi$ devient un morphisme f).

Supposons que n est le nombre minimal d'éclatements nécessaires pour obtenir un tel diagramme, supposons $n > 0$.

soit E, droite exceptionnelle de ε_n.

C non rationel $\Rightarrow f(E) = \text{point}$ (E irréductible sinon $f(E) = C$)

donc f se factorise en $f' \circ \varepsilon_n$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \hat{S} \arrow[dl, "\varepsilon_n"'] \arrow[dddr, "f"] & \\
 & & \cdot \arrow[dl, "\varepsilon_{n-1}"'] \arrow[ddrr, "f'"'] & & \\
 & \cdot \arrow[dl, "\varepsilon_1"'] & & & \\
S \arrow[rrrr, dashed, "q\circ\varphi"'] & & & & C
\end{tikzcd}$$

contredit la minimalité de n.

Donc $n=0$ et $q \circ \varphi$ morphisme de fibre générique $\simeq \mathbb{P}^1$.

Lemme précédent $\Rightarrow$ S est géométriquement réglée par $q \circ \varphi$.