Exposé 2 : Surfaces reglées (part. II)

S surface proj. lisse$/\mathbb{C}$

Lemme : Soit $C \subseteq S$ courbe lisse et $E \to C$ fibré vect. de rang 2.
Alors,

(i) $\exists$ suite exacte $0 \to L \to E \to M \to 0$, avec $L, M \in \operatorname{Pic} C$

(ii) si $h^0(E) \geq 1$ on peut supposer $L = \mathcal{O}_C(D)$, avec $D \geq 0$

(iii) si $h^0(E) \geq 2$ et $\deg(E) = \deg(\det(E)) > 0$, on peut supposer $D > 0$.

Dém : On peut supposer $h^0(E) \geq 1$ en remplaçant E par $E \otimes nA$, $n \gg 0$, $A \in \operatorname{Pic} C$ ample.

$0 \neq s \in H^0(C,E) \iff s : C \to E \iff \tilde{s} \in \mathcal{H}om(E^\vee, \mathcal{O}_C) \iff \tilde{s} : E^\vee \to \mathcal{O}_C$

L'image de $\tilde{s}$ est un faisceau d'idéaux
$\rightsquigarrow \mathcal{O}_C(-D)$ avec D diviseur effectif dans C

$\Rightarrow \ker(E^\vee \to \mathcal{O}_C(-D))$ faisceau inversible

Duals : $0 \to \mathcal{O}_C(D) \to E \to M \to 0$, $D \geq 0$. $\Rightarrow$ (i) et (ii).

Supposons $h^0(E) \geq 2$ et $\deg(E) > 0$

Soient $s, t \in H^0(E)$ lin. indep.

$\deg(E) > 0 \Rightarrow s \wedge t$ s'annule pour certain $p \in C$.

i.e, $\exists \mu, \lambda \in \mathbb{C}$ (un $\neq 0$) tq $\mu s(p) + \lambda t(p) = 0$

$\Rightarrow$ $\mu s + \lambda t \in H^0(E)$ s'annule en $p \in C$

En remplaçant s par $\mu s + \lambda t$ dans la preuve de (i) et (ii) on obtient (iii). $\blacksquare$ (Voir Hartshorne V.2.7)

Corollaire : (RR) $\chi(E) = \deg(E) + 2 - 2g(C)$ pour $E \to C$ de rang 2

Question : L'extension

$$0 \to L \to E \to M \to 0$$

est ~~-~~-elle triviale ?

$\iff E \simeq L \oplus M$? $\iff$ $0 \to L \otimes M^{-1} \to E \otimes M^{-1} \to \mathcal{O}_C \to 0$ scindée ?

Rappel (Hartshorne III.6) :

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0 \quad \text{suite exacte de } \mathcal{O}_X\text{-modules}$$

considerons $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}'', \cdot) = R^i \,\mathrm{Hom}(\mathcal{F}'', \cdot)$

$$\to \delta : \mathrm{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{F}'') \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{F}'')$$
$$1_{\mathcal{F}''} \longmapsto \xi$$

Fait : Extensions de $\mathcal{F}''$ par $\mathcal{F}'$ à isomorphisme près $\xleftrightarrow{1-1}$ Éléments $\xi \in$ ~~$\mathcal{H}$~~ $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{F}')$
$\uparrow$ "classe de l'extension"

Dans notre cas : Extensions $\longleftrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, L \otimes M^{-1})$
$\wr\!\wr$ $\to$ Funct. derivés de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, \bullet) = \Gamma(C, \cdot)$

$$H^0(C, E \otimes M^{-1}) \xrightarrow{\alpha} H^0(C, \mathcal{O}_C) \xrightarrow{\partial} H^1(C, L \otimes M^{-1})$$
$$1 \longmapsto \partial(1) = \xi$$

~~Al~~ Alors, $L \to E \to M$ triviale $\iff \exists\, s \in H^0(C, E \otimes M^{-1})$ section tq $\alpha(s) = 1$ (scindée)

$\iff \partial(1) = 0 \in H^1(C, L \otimes M^{-1})$.

Rmq : Deux extensions sont isom. si les corresp. classes dans Ext^1 son proportionnelles.

Prop : 1) Tout fibré $E \to \mathbb{P}^1$ de rang 2 est décomposable. En particulière, toute surface géom. reglée sur $\mathbb{P}^1$ est isom. à

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)), \quad n \geq 0$$

2) $E \to C$ fibré vect de rang 2 sur C courbe elliptique. Alors,

a) Soit E decomposable ;

b) Soit $E \simeq E' \otimes L$, avec $L \in \mathrm{Pic}\, C$ et E'

•) est une ext. non-triviale de $\mathcal{O}_C$ par $\mathcal{O}_C$; ou bien

•) $\forall p \in C$, E' est une ext. non-triviale de $\mathcal{O}_C(p)$ par $\mathcal{O}_C$.

3) $\forall$ courbe C de genre g $\exists$ des variétés (ouvertes) S qui paramétrisent fibrés vect de rang 2 sur C, $(E_s)_{s\in S}$, tq $\det(E_s)$ est constante, E_s non-décomposable et $E_s \not\cong E_{s'}$ si $s \neq s'$. En plus, $\dim S \geq 2g-3$

(Rmq : $\dim S = 3g-3$; beaucoup de fibrés non-décomposables !)

Dém : Rmq : $E \to C$ fibré de rang 2

$$\Rightarrow \deg(E \otimes L) = \deg(\det(E\otimes L)) = \deg E + 2\deg L.$$

1) $E \to \mathbb{P}^1$ fibré de rang 2.

On peut supposer $d = \deg(E) = 0$ ou -1

RR : $\chi(E) = \deg(E) + 2 \Rightarrow h^0(E) = d+2+h^1(E) \geq d+2 \geq 1$

$\Rightarrow \exists$ suite exacte $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \to E \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-k) \to 0$

avec $k \geq 0$.

$\xleftrightarrow{\text{corresp.}}$ $\xi \in H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2k-d)) \underset{\substack{\uparrow \\ d=0 \text{ ou } -1}}{\simeq} \{0\}$

2) $E \to C$, C courbe elliptique

On peut supposer $d = \deg(E) = 1$ ou 2.

RR : $h^0(E) \geq d \geq 1$. $\Rightarrow \exists$ $L_k, M_{d-k} \in \operatorname{Pic} C$ tq
$\deg L_k = k \geq 0$, $\deg M_{d-k} = d-k$.

$\Rightarrow \exists$ suite exacte $0 \to L_k \to E \to M_{d-k} \to 0$.

$\longleftrightarrow \xi \in H^1(C, L_k \otimes M_{d-k}^{-1})$

Rappel : $L \to C$ fibré en droites, $g(C) = g$. Alors :

RR : $h^0(L) - h^1(L) = \deg L - g + 1 \Rightarrow \begin{cases} h^0(L) = 0 & \text{si } \deg L < 0 \\ h^1(L) = 0 & \text{si } \deg L > 2g-2 \\ L \simeq \mathcal{O}_C & \text{si } \deg L = 0 \text{ et } \exists s \in H^0(L), s \neq 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\deg L$, $L \not\cong \mathcal{O}_C \Rightarrow h^0(L) = h^1(L) = 0$.

Rmq : • si $k=0$ on peut supposer $L_k \cong \mathcal{O}_C$.

• si $\deg(L_k \otimes M_{d-k}^{-1}) = 2k-d > 0 \Rightarrow$ extension triviale.

Deux cas :

$\underline{d=2}$ $\Rightarrow h^0(E)\geq 2 \Rightarrow$ On peut supposer $K\geq 1$

$2K-d = 2K-2>0 \iff K\geq 2 \Rightarrow$ ext. triviale ✓

Si $K=1$: $\deg(L_K\otimes M_{d-K}^{-1})=0$.

Si $L_K\otimes M_{d-K}^{-1}\not\cong \mathcal{O}_C \Rightarrow h^1(L_K\otimes M_{d-K}^{-1})=0 \Rightarrow$ ext. triviale

Sup. $L_K\otimes M_{d-K}^{-1}\cong\mathcal{O}_C$ $\qquad h^1(\mathcal{O}_C)=1$.

$\Rightarrow 0\to\mathcal{O}_C\to E\otimes L_K^{-1}\to\mathcal{O}_C\to 0$

$\Rightarrow E' = E\otimes L_K^{-1}$ ext. (non-triviale) de $\mathcal{O}_C$ par $\mathcal{O}_C$.

$\underline{d=1}$ $2K-d=2K-1>0 \iff K\geq 1 \Rightarrow$ ext. triviale ✓

Si $K=0$ on peut supposer $L_K\cong\mathcal{O}_C$.

$$0\to\mathcal{O}_C\to E\to M_1\to 0$$

RR : $M_1\cong\mathcal{O}_C(p)$ pour certain $p\in C$.

3) Rappel : $D\subseteq C$ diviseur est special si $h^1(D)>0$.

Fait : Si $g\geq 2$, alors $\exists D\subseteq C$ non-special de degré $g-1$.

Idée : • Si D diviseur tq $h^0(D)>0 \Rightarrow h^0(D-p)=h^0(D)-1$

sauf pour un nombre fini de $p\in Bs|D|$.

• Soient $p_1,\dots,p_{g+1}\in C$ points généraux

RR : $h^0(p_1+\dots+p_g)=1 \Rightarrow h^0(p_1+\dots+p_g-p_{g+1})=0$.

$$\overset{(RR)}{=}\ h^1(p_1+\dots+p_g-p_{g+1})$$

Soit $L\in\operatorname{Pic}C$ tq $\deg L=g-1$ et $h^0(L)=0$.

RR : $h^1(L^\vee)=2g-2$.

Soit $S\subseteq H^1(C,L^\vee)$ hyperplan affine tq $0\notin S$

Alors $\dim S=2g-3$ et tout $s\in S$ corresp. à une ext. non décomp.

$$0\to\mathcal{O}_C\to E_s\to L\to 0$$

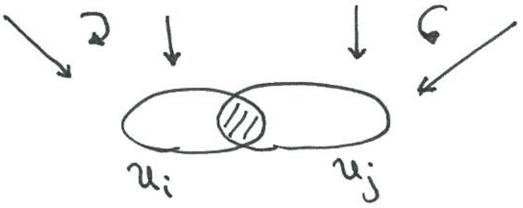
$h^0(E_s)=h^0(\mathcal{O}_C)=1 \Rightarrow E_s\not\cong E_{s'}$ si $s\neq s'$ ■

Fibrés projectifs : Soit X variété algébrique

Rappels : $E \xrightarrow{p} X$ fibré de rang r

$$p^{-1}(\mathcal{U}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_i \times \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathcal{U}_j \times \mathbb{C}^r \xleftarrow{\sim} p^{-1}(\mathcal{U}_j)$$

$$(x, v) \longmapsto (x, g_{ij}(x) v)$$



$$g_{ij} \in GL_r(\mathbb{C}) \longmapsto [g_{ij}] \in PGL_r(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{r-1}) \rightsquigarrow \mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$$

$$\begin{tikzcd} \pi^* E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{P}(E) \arrow[r, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

On définit $N \subseteq \pi^* E$ par :

$y \in \mathbb{P}(E)$ $\longleftrightarrow$ $[H_y] \in \mathbb{P}^{r-1}$ $\longleftrightarrow$ H_y hyperplan de $\mathbb{C}^r$ $\Big\} \Rightarrow N_y := H_y$

$\pi(y) = x \in X$ (grothendieck)

$\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^{r-1} \ni y$

On obtient

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \pi^* E \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \longrightarrow 0$$

$\uparrow$ fibré tautologique

Étant donné $f : T \to X$ morphisme

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Morphismes}/X \quad g : T \to \mathbb{P}(E) \\ \begin{tikzcd} T \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}(E) \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} L \in \mathrm{Pic}(T) \text{ et quotients} \\ f^* E \longrightarrow L \longrightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$g \longmapsto \left(L = g^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1), \ g^* u : f^* E \twoheadrightarrow L \right)$$

$$g : T \to \mathbb{P}(E) \longleftarrow (L, \ v : f^* E \twoheadrightarrow L)$$

$$t \mapsto \mathrm{Ker}(v_t) \subseteq E_{f(t)}$$

En particulier,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Sections de } \pi \\ s : X \to \mathbb{P}(E) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{Quotients} \\ E \to L \to 0 \end{array} \right\}.$$

Prop: Soit $S = \mathbb{P}_C(E)$ une surface géométriquement reglée sur C, avec $p : S \to C$ morphisme structurel. Écrivons h pour la classe de $\mathcal{O}_S(1)$ dans $\mathrm{Pic}(S)$ (ou dans $H^2(S,\mathbb{Z})$). Alors :

1) $\mathrm{Pic}(S) = p^*\mathrm{Pic}(C) \oplus \mathbb{Z}h$
2) $H^2(S,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$, où f est la classe d'une fibre.
3) $h^2 = \deg(E)$.
4) $[K_S] = -2h + (\deg(E) + 2g(C) - 2)f$ en $H^2(S,\mathbb{Z})$.

Dém: 1) Soit F une fibre de p. $\Rightarrow F \cdot h = 1$

En effet, $\det(p^*E) \simeq p^*(\det E) \cong N \otimes \mathcal{O}_S(1)$

$\Rightarrow 0 = F \cdot p^*(\det E) = F \cdot N + F \cdot h$

$F \simeq \mathbb{P}^1$ fibre. Par définition : $N|_F \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \Rightarrow F \cdot N = -1 \Rightarrow F \cdot h = 1$.

$L \in \mathrm{Pic}(S) \Rightarrow L = D + mh$, avec $D \cdot F = 0$. $\left(\begin{array}{l} m = L \cdot F \text{ et} \\ D = L - mh \end{array}\right)$

m.q. $D \in p^*\mathrm{Pic}(C)$:

Soit $D_n = D + nF \Rightarrow D_n^2 = D^2$, $D_n \cdot K_S = D \cdot K_S - 2n$

et $h^0(K_S - D_n) = 0$ pour $n \gg 0$

(sinon : $\forall n \gg 0$ $\exists$ diviseur $E \sim K_S - D_n$ effectif, $F^2 = 0 \geq 0$

$\underset{\text{Lemme utile}}{\Rightarrow}$ $0 \leq E \cdot F = D \cdot K_S - 2n - D^2$ ↯)

RR: $h^0(D_n) + h^0(K_S - D_n) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D_n^2 - D_n \cdot K_S)$

$\Rightarrow$ $h^0(D_n) \geq n + \text{cte}$ pour $n \gg 0$.

$\Rightarrow \exists$ diviseur effectif $E \in |D_n|$, $E \cdot F = 0$

$\Rightarrow$ Chaque composante de E est une fibre de p. $\Rightarrow E \in p^*\mathrm{Pic}(C)$,

2) $\mathrm{Pic}(S) \twoheadrightarrow H^2(S,\mathbb{Z})$ + Deux points sur C ont la même classe d'homologie dans $H^2(C,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$

$H \mapsto h$

$F \mapsto f$

$\Rightarrow H^2(S,\mathbb{Z})$ engendré par h et f

Ils sont lin. indep. : $f^2 = 0$ et $f \cdot h = 1$ ✓

3) Soit $E' \to S$ fibré de rang 2 tq il existe une suite exacte

$$0 \to L \to E' \to M \to 0 \quad , \text{ avec } L, M \in \mathrm{Pic}(S)$$

$$\Rightarrow L \cdot M = L^{-1} \cdot M^{-1} \overset{\text{def}}{=} \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L) - \chi(M) + \chi(L \otimes M)$$

$$= \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(E') + \chi(\det(E')) \leftarrow \text{indép. de } L \text{ et } M!$$

$$:= c_2(E') \in \mathbb{Z} \, .$$

~~Ici~~ $\underline{E' = p^*E}$: $c_2(p^*E) = p^*L \cdot p^*M = 0$

D'autre part, $0 \to N \to p^*E \to \mathcal{O}_S(1) \to 0 \quad \Rightarrow c_2(p^*E) = 0 = h \cdot [N]$.

$N \otimes \mathcal{O}_S(1) \simeq \det(p^*E) \simeq p^*(\det E) \Rightarrow [N] = -h + p^*e$,

où $e = [\det E] \in \mathrm{Pic}(C)$.

$$\Rightarrow 0 = h \cdot [N] = -h^2 + h \cdot p^*e = -h^2 + \underbrace{\text{“}p_*h \cdot e\text{”}}_{\deg(E)} \quad \checkmark$$

4) Écrivons $[K_S] = ah + bf \in H^2(S, \mathbb{Z})$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a = K_S \cdot f = -2$.

Soit $s : C \to S$ une section, écrivons $[s(C)] = h + rf$, $r \in \mathbb{Z}$

Formule du genre pour $s(C) \cong C$:

$$2g(C) - 2 = (h+rf)^2 + (h+rf)(-2h+bf) = \ldots = -\deg E + b \checkmark \quad ■$$

$\underline{\text{Invariants numériques}}$: Soit S surface proj. lisse / $\mathbb{C}$.

$q(S) := h^1(S, \mathcal{O}_S) \underset{\mathbb{C}}{=} h^0(S, \Omega^1_S) = \frac{1}{2} b_1(S)$. (irrégularité)

$p_g(S) := h^2(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S))$ (genre géométrique)

$P_n(S) := h^0(S, \mathcal{O}_S(nK_S))$, $n \geq 1$ (plurigenre)

$\underline{\text{Prop}}$: 1) q, p_g, P_n sont des invariants birationnels

2) Si S est reglée sur C :

$q(S) = g(C)$; $p_g(S) = 0$; $P_n(S) = 0 \ \forall n \geq 2$.

3) Si S est géométriquement reglée :

$K_S^2 = 8(1 - g(C))$; $b_2(S) = 2$; $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - g(C)$. ■