Exposé 3 : Surfaces rationnelles

Déf : S rationnelle $\iff S \simeq \mathbb{P}^2$

Rappel : surfaces géom. réglées sur $\mathbb{P}^1$:

$S \to \mathbb{P}^1$ morphisme lisse tq fibres $\simeq \mathbb{P}^1$.

$\iff S \to \mathbb{P}^1$ c'est un $\mathbb{P}^1$-fibré

$$\iff \begin{tikzcd} S \arrow[dr] & \simeq & \mathbb{P}(E) \arrow[dl] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

E fibré de rang $2 / \mathbb{P}^1 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$

$\mathbb{P}(E \otimes L) \simeq \mathbb{P}(E)$, $L \in \operatorname{Pic} \mathbb{P}^1$

$\Rightarrow S \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) := \mathbb{F}_n$, $n \geq 0$.

Soit f la classe d'une fibre (dans $\operatorname{Pic}(S)$ ou $H^2(S, \mathbb{Z})$)

h : classe de $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(1)$.

Prop :

(i) $\operatorname{Pic}(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$, $f^2 = 0$, $f \cdot h = 1$, $h^2 = n$

$h^2 = \deg(E) = \deg(\Lambda^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = n$.

(ii) si $n > 0$, $\exists!$ courbe irréd B sur $\mathbb{F}_n$ tq $B^2 < 0$;

b : classe de $B \Rightarrow b = h - nf$, $b^2 = -n$.

Rappel : si $p : S = \mathbb{P}_C(E) \to C$, p^*E fibré sur S

N : sous-fibré en droites tautologique

$$0 \to N \to p^*E \xrightarrow{u} \mathcal{O}_S(1) \to 0$$

Sections $s : C \to S \xleftrightarrow{1:1}$ fibrés en droites quotients de $E \twoheadrightarrow L$

$s : C \to S \longmapsto L = s^*\mathcal{O}_S(1)$, $s^*u : E \to L$

$s : C \to S \longleftrightarrow v : E \twoheadrightarrow L$

$t \in C \mapsto$ droite $\ker(v_t) \subset E_t$.

Ici : Soit s : section de $S \to \mathbb{P}^1$ qui corresp. à

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$$

$B = s(\mathbb{P}^1)$ $\quad$ b = classe de B

$\Rightarrow b = \underset{\substack{\downarrow \\ b.f=1}}{1}\cdot h + rf \quad , \; r \in \mathbb{Z}$

$s^* \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \Rightarrow h\cdot b = 0 \Rightarrow r = -n$

$\Rightarrow b^2 = (h-nf)^2 = -n.$

Si C courbe irred sur $\mathbb{F}_n$, $C \neq B$

$[C] = \alpha h + \beta f$

$C.f = \alpha \geqslant 0$

$C.B \geqslant 0$ et $h\cdot b = 0 \Rightarrow \beta \geqslant 0$, donc $C^2 \geqslant 0$.

<u>Donc</u> : Si $n, m \geqslant 1$, $\mathbb{F}_n \simeq \mathbb{F}_m \Leftrightarrow n = m$.

$\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \quad \forall C$ courbe, $C^2 \geqslant 0$.

$C = \{0\} \times \mathbb{P}^1 \quad , \quad C' = \mathbb{P}^1 \times \{0\}$

$\mathcal{U} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus (C \cup C') \simeq \mathbb{A}^2$

Si D diviseur sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \Rightarrow D|_{\mathcal{U}} = \operatorname{div}(\varphi)$, φ fonct. rat.

$\Rightarrow D = \operatorname{div}(\varphi) + nC + mC' \quad , \; n, m \in \mathbb{Z}$

$D \equiv nC + mC'$

$C.C' = 1 \quad , \quad C^2 = C'^2 = 0$

Si Γ courbe sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \Leftrightarrow$ ~~eq~~ équation bihomogène de degrés n, m

Alors, $\Gamma \equiv nC + mC'$

$\Gamma^2 \geqslant 0 \qquad \Gamma^2 = 2nm$

(iii) $\mathbb{F}_n$ minimal say $\mathbb{F}_1$

Claim $n \geq 2$ ✓

$n = 0$ ✓

$$\mathbb{F}_1 \simeq Bl_p(\mathbb{P}^2)$$

En effet, $S \to \mathbb{P}^2$ éclatement en O.

$\begin{array}{c} S \\ \cup\!\mathsf{I} \\ E \end{array}$ exceptionnel.

On compose avec la projection depuis O donne

$S \to \mathbb{P}^1$ surface géom. reglée / $\mathbb{P}^1$

$$E^2 = -1 \Rightarrow \begin{tikzcd} S \arrow[dr] & \simeq & \mathbb{F}_1 \arrow[dl] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

<u>Systèmes linéaires</u>

X variété.

Système linéaire $\mathcal{P} \subseteq H^0(X,L)$ définit $X \dashrightarrow \mathbb{P}^N = \mathcal{P}^\vee$

$x \longmapsto$ sections de L dans $\mathcal{P}$ s'annulant en x.

Si $L = \mathcal{O}_S(D)$:

$x \longmapsto$ courbes de $\mathcal{P}$ passant par x.

Non défini en x, tq x est sur toutes les courbes de $\mathcal{P}$ (point-base).

$\exists$ correspondance

$\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^n \quad \longleftrightarrow \quad \varphi^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|$ ← système linéaire complet de dim n

sans composante fixe.

Si $S \subset \mathbb{P}^n$ surface rationnelle, on a $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow S$

donc $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, donc système sur $\mathbb{P}^2$.

Soit $\mathcal{P}$ syst. linéaire sur $\mathbb{P}^2$

$\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathcal{P}^\vee$.

$\exists$ éclatements $\varepsilon : S \to \mathbb{P}^2$ tq $\varphi \circ \varepsilon : S \to \mathcal{P}^\vee$.

<u>Idée</u>: $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{P}^2$ points de base $x_1, \to x_r$, $\mathcal{P} \subset |D|$

$\varepsilon : S \to \mathbb{P}^2$ éclaté en ces points.

$\varepsilon^* \mathcal{P} \subseteq |\varepsilon^* D|$.

Supposons $r = 1$, $x_1 = x$

Point base x de $\mathcal{P}$ $\longleftrightarrow$ Composante fixe E de $\varepsilon^* \mathcal{P}$, de multiplicité k

$\widehat{\mathcal{P}} \subset |\varepsilon^* D - kE|$

Définit $S \dashrightarrow |\widehat{\mathcal{P}}|^\vee$.

On supposera qu'il suffit d'éclater r points $p_1, \to p_r$

$\varepsilon : S \to \mathbb{P}^2$

$f = \varphi \circ \varepsilon : S \to \mathbb{P}^N$

$\widehat{\mathcal{P}}$ système lin. sur S

m_i = mult. minimale des courbes de $\mathcal{P}$ en p_i

d leur degré $(|\mathcal{P}| \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|)$, $L = \varepsilon^* l$, $E_i = \varepsilon^* p_i$

$\widehat{\mathcal{P}} \subseteq |dL - \sum m_i E_i|$.

f plongement $\iff$ • (injectivité) $\widehat{\mathcal{P}}$ sur S sépare les points
$\forall x, y \in S$ $\exists C \in \widehat{\mathcal{P}}$ tq C passe par x et pas par y.

• $\widehat{\mathcal{P}}$ sépare les tangents : $\forall x \in S$ les courbes de $\widehat{\mathcal{P}}$ passant par S ne sont pas toutes tangentes à une même direction.

sur $\mathbb{P}^2$

• (injectivité) : si $x \in E_i$ "C passe par x"

$\iff$ "C tangent en p_i à la direction x"

• Si $x \in E_i$

$\mathcal{P}_x$:= syst. linéaire des courbes de $\mathcal{P}$ tang en p_i à x

$\to$ $\forall$ conique Q tang en p_i à x $\exists$ courbe C de $\mathcal{P}_x$

avec un contact d'ordre 2 en p_i.

Si f plongement

$S' = f(S) \subset \mathbb{P}^N$

$\mathrm{Pic}(S')$ engendré par $L = \varepsilon^* l$ et les E_i avec $E_i^2 = -1$, $L^2 = 1$

base orthogonale.

Si H sections hyperplane de S'

$H \equiv dL - \sum m_i E_i$ $\quad$ d : degré des courbes de $\mathcal{P}$

$H^2 = d^2 - \sum m_i^2$

Droites sur S' $\leftrightarrow$ Diviseurs effectifs D sur S' tq $D \cdot H = 1$