Exposé 4 : Surfaces rationnelles (partie 2) :

Rappel : Soit $S \overset{\sim}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^2$ surface rationnelle.

Quitte à éclater : $\varepsilon : S \to \mathbb{P}^2$

Un morphisme $S \longrightarrow \mathbb{P}^N$ correspond à $\widehat{\mathcal{P}}$ système lin. sans point de base. Ici :

$\widehat{\mathcal{P}} = \varepsilon^* \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|$ système lin.

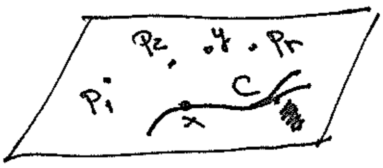
$\Rightarrow \widehat{\mathcal{P}} \subseteq |dL - \sum m_i E_i|$, où $L = \varepsilon^* l$

l : classe d'une droite $\subseteq \mathbb{P}^2$

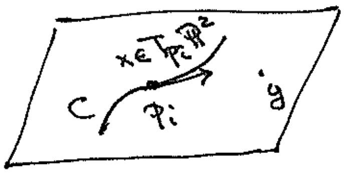
$\mathrm{Exc}(\varepsilon) = \bigcup E_i$.

$f := \varphi_{|\widehat{\mathcal{P}}|} : S \to \mathbb{P}^N$ est un plongement si :

(a)

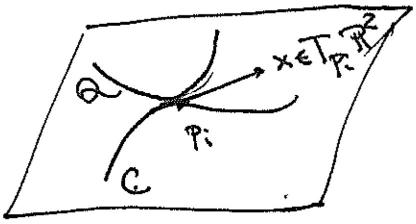


$\exists\, C \in \mathcal{P}$ qui sépare $x \neq y$ (ici $x \neq p_i$)



$\exists\, C \in \mathcal{P}$ qui "sépare" $x \in E_i$ et y

(b)



$\mathcal{P}_x$: courbes C dans $\mathcal{P}$ tq $p_i \in C$ et $T_{p_i} C = x$

$\Rightarrow \forall\, Q$ conique tq $p_i \in Q$ et $T_{p_i} Q = x$,

$\exists\, C \in \mathcal{P}_x$ tq $\mathrm{mult}_{p_i}(C \cap Q_i) = 2$.

Dans ce cas :

-) $\mathrm{Pic}(S)$ est engendré par $L = \varepsilon^* l$ et les E_i, avec

$L^2 = 1$, $E_i^2 = -1$.

-) Section hyperplane : $H \sim dL - \sum m_i E_i$

-) $\deg(S) = H^2 = d^2 - \sum m_i^2$.

-) Droites $\subseteq S$: $D \in \mathrm{Pic}(S)$ tq $D \cdot H = 1$.

Fait: Toute surface lisse est isomorphe, via proj, à une surface lisse $\subseteq \mathbb{P}^5$ ②

Exemple: (systèmes de coniques)

1) $\mathcal{P} = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)|$ définit $j : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ via $[x:y:z] \mapsto [x^2:y^2:z^2:xy:xz:yz]$

Soit $V = j(\mathbb{P}^2)$ (surface de Veronese).

$\Rightarrow H \sim 2L$ (section hyperplane) $\Rightarrow \deg(V) = 4$.

Pas de droites: $D \cdot H = 2D \cdot L \neq 1 \quad \forall D \in \mathrm{Pic}(V)$.

2) **Prop**: Soit $p \in \mathbb{P}^5$ point générique. Alors la projection de p induit un isom. entre V et son image $V' \subseteq \mathbb{P}^4$.

Idée: d droite $\subseteq \mathbb{P}^2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(d) \simeq \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$: plan qui contient la conique $j(d)$.

$$X = \bigcup_{\substack{d \subseteq \mathbb{P}^2 \\ \text{droite}}} \mathcal{P}(d) \subseteq \mathbb{P}^5$$

$\Rightarrow \dim X \leq 4$.

En effet, $Z = \{(d,x) \in \check{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{P}^5 / \ x \in \mathcal{P}(d)\} \xrightarrow{pr_1} \check{\mathbb{P}}^2$

est un $\mathbb{P}^2$-fibré $\Rightarrow \dim Z = 4$.

$X = pr_2(Z) \Rightarrow \dim X \leq \dim Z = 4$.

Soient $x, y \in V$, $x \neq y$. Alors la droite $\langle x, y \rangle \subseteq \mathcal{P}(d)$,

où $d = \langle j^{-1}(x), j^{-1}(y) \rangle \subseteq \mathbb{P}^2$

$\Rightarrow$ Les bisécantes appartient à X ∎

3) Projection générique V' dans $\mathbb{P}^3$: surface singulière de degré 4 (surface de Steiner)

4) Projection de V d'un point $p \in V$: $S \subseteq \mathbb{P}^4$

La proj. n'est pas définie dans $p \to 1$ point de base

$\Rightarrow \deg(S) = 2^2 - 1^2 = 3$

S correspond à $j : \mathbb{F}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ donné par $|h+f|$.

$(= j(\mathbb{F}_1))$

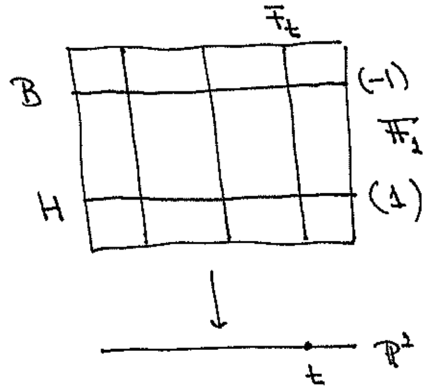
En effet,

$$\begin{tikzcd} p \in \mathbb{P}^2 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, dashed, "\pi"] & \mathbb{P}^5 \ni i(p) \arrow[d, dashed, "pr_{i(p)}"] \\ Bl_p(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{F}_1 \arrow[u] \arrow[r, hook, "j"'] & \mathbb{P}^4 \end{tikzcd}$$

$S = j(\mathbb{F}_1)$ est une surface reglée :

•) $f \cdot (h+f) = 1 \Rightarrow F_t \simeq \mathbb{P}^1$ fibre* de $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^1$ au dessus de $t \in \mathbb{P}^1$ $\rightsquigarrow$ $\underset{\displaystyle D_t}{\overset{j(F_t)}{\shortparallel}} \simeq \mathbb{P}^1$ droite dans S

$\rightsquigarrow$ Famille $\{D_t\}_{t\in\mathbb{P}^1}$ tq $D_t \cap D_{t'} = \emptyset$ si $t \neq t'$.



$b \cdot (h+f) = 1 \Rightarrow j(B)$ droite $\subseteq S$

$h \cdot (h+f) = 2 > 1$

En général, si $C \subseteq \mathbb{F}_1$ courbe irred tq $[C] = ah + bf$, $a, b \geq 0$ $(C \neq B)$

$\Rightarrow [C] \cdot (h+f) = 2a + b > 1$, sauf si $[C] = f$.

$\Rightarrow S$ surface cubique reglée dans $\mathbb{P}^4$.

5) Projection generique $p \in \mathbb{P}^4 - S$: surface singulière cubique $\subseteq \mathbb{P}^3$

6) Projection de S d'un point $p \in S$: quadrique $\subseteq \mathbb{P}^3$.

<u>Systèmes de cubiques</u>

Soient $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^2$ points differents et soit $\varepsilon : P_r = Bl_{p_1,\dots,p_r} \to \mathbb{P}^2$ l'éclatement de $p_1, \dots, p_r$.

•) $K_{\mathbb{P}^2} = -3l \Rightarrow K_{P_r} = -3L + E_1 + \dots + E_r$

$\Rightarrow -K_{P_r} = H = 3L - E_1 - \dots - E_r \longleftrightarrow$ Système de cubiques qui passent par $p_1, \dots, p_r$.

<u>But</u>: Plonger $P_r \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N$ en utilisant $|-K_{P_r}| = |3L - E_1 - \dots - E_r|$.

(On aura : •) $S_d = j(P_r)$

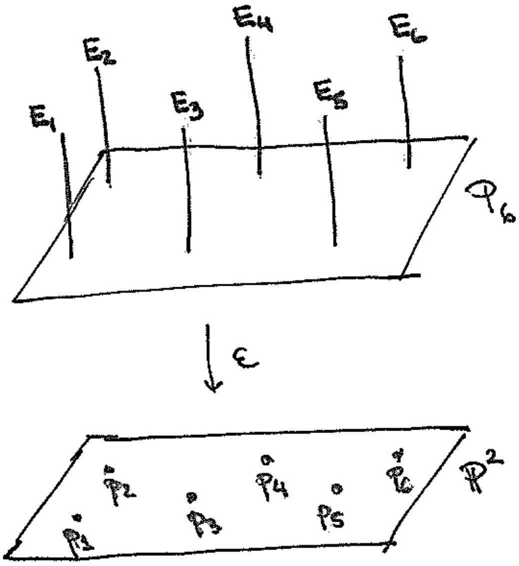
$\Rightarrow d = \deg(S_d) = H^2 = 9 - r$.

•) $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) = 10 \Rightarrow N = 9 - r = d \geq 3 \iff 0 \leq r \leq 6$.

Supposons $0 \le r \le 6$. Les points $p_1, \dots, p_r$ sont en <u>position générale</u> si
- p_i, p_j, p_k ne sont pas colinéaires, lorsque $p_i \neq p_j \neq p_k$. ($r \geq 3$)
- $p_1, \dots, p_6$ ne appartient pas à une conique ($r = 6$).

<u>Prop</u>: Supposons que $p_1, \dots, p_r$ ($r \le 6$) sont en position grale.
Alors le systèmes de cubiques qui passent par $p_1, \dots, p_r$ définit un plongement $j : \mathbb{P}_r \hookrightarrow \mathbb{P}^d$.
La surface $S_d = j(\mathbb{P}_r)$ est une surface de degré d dans $\mathbb{P}^d$, appellée "surface de del Pezzo de degrée d".

<u>Preuve</u> $(r = 6)$ $(\Rightarrow d = 3)$



On doit vérifier que $|3L - E_1 - \dots - E_6|$
(a) sépare points
(b) sépare tangents

<u>(a)</u>: Soient $x, y \in \mathbb{P}_6$ tq $x \neq y$.
But: trouver $C \in |3L - E_1 - \dots - E_6|$ tq $x \in C$ et $y \notin C$.

<u>Fait</u>:
- Soient $i < j \le 6$ et $x \in \mathbb{P}_6$ tq $\varepsilon(x) \notin \{p_i, p_j\}$

  $\overset{\text{pos. grale}}{\Rightarrow}$ $\exists!$ conique $Q_{ij}^x \subseteq \mathbb{P}^2$ qui passe par x et p_k $(k \neq i, j)$
  (5 points dét. une conique)
- $\exists!$ conique $Q_i \subseteq \mathbb{P}^2$ qui passe par les p_j $(j \neq i)$
  (5 points dét. une conique).

  $\Rightarrow \widehat{Q}_i \cap \widehat{Q}_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ ($\widehat{Q}_i$ transf. stricte de Q_i dans $\mathbb{P}_6$).

(<u>Idée</u>: Bézout: $\# Q_i \cap Q_j \le 4$.
Mais $Q_i \cap Q_j = \{p_k\}_{k \neq i,j} \Rightarrow \# Q_i \cap Q_j = 4$ et $T_{p_k} Q_i \neq T_{p_k} Q_j$)

- Notation: $L_{ij} = \langle p_i, p_j \rangle \subseteq \mathbb{P}^2$ droite, $i \neq j$.

(a) : Soient $x, y \in \mathcal{P}_6$ avec $x \neq y$.

Soit i tq $p_i \neq \varepsilon(x), \varepsilon(y)$ et $x \notin \widehat{Q}_i$

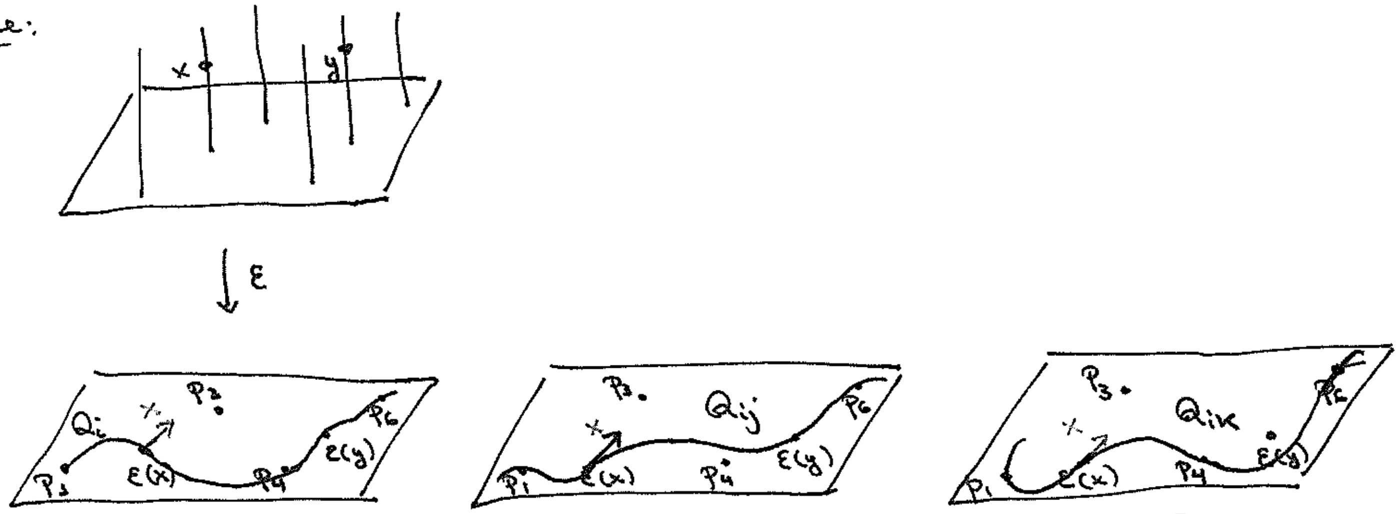
$\Rightarrow \widehat{Q}_{ij}^x \cap \widehat{Q}_{ik}^x = \{x\}$, $p_k \notin \{p_i, p_j, \varepsilon(x)\}$

$\Rightarrow y \in \widehat{Q}_{ij}^x$ pour au plus un possible j

D'autre part, $y \in \widehat{L}_{ij}$ pour au plus un possible j

$\Rightarrow \exists j$ tq $C = \widehat{Q}_{ij}^x \cup \widehat{L}_{ij}$ (cubique) est telle que $x \in C$, $y \notin C$.

Idée :



e.g : $i \neq 2,5$
$x \notin \widehat{Q}_i$
$(i = 3)$

e.g : $i = 3$
$j = 4$

e.g : $i = 3$
$k = 5$

$\widehat{Q}_{ij}^x \cap \widehat{Q}_{ik}^x = \{x\}$

(b) Similaire ∎

Thm : Soit $S \subseteq \mathbb{P}^3$ surface cubique lisse $\Rightarrow S \simeq S_3 \simeq Bl_{p_1,\dots,p_6}(\mathbb{P}^2)$

Thm : Soit $S \subseteq \mathbb{P}^4$ intersection de deux quadriques $\Rightarrow S \simeq S_4 \simeq Bl_{p_1,\dots,p_5}(\mathbb{P}^2)$

Remarques :

1) Historiquement : S del Pezzo $\Leftrightarrow S \simeq$ surface de degré $d \subseteq \mathbb{P}^d$

$\Updownarrow$

Aujourd'hui : S del Pezzo $\Leftrightarrow -K_S$ ample.

2) $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^8$ surface de del Pezzo de degré 8.