Exposé 5 : "Le théorème de Castelnuovo"

Rappel : $q(S) = h^1(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, \Omega^1_S) = \frac{1}{2} b_1$ irrégularité

$p_g = h^2(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S))$ genre

$P_n = h^0(S, \mathcal{O}_S(nK_S))$ pluri-genre

Invariants birat !

Si S reglée $/ C \Rightarrow q(S) = g(C)$, $P_n(S) = 0$.

Si S rationnelle $\Rightarrow q(S) = 0$, $P_n(S) = 0 \ \forall n \geq 1$.

Rem : Si $P_n(S) \neq 0$ et $P_m(S) \neq 0 \Rightarrow P_{n+m}(S) \neq 0$

$\exists$ multiplication

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(nK)) \times H^0(S, \mathcal{O}_S(mK)) \to H^0(S, \mathcal{O}_S((n+m)K))$$

Théorème : S est rationnelle $\Leftrightarrow q(S) = P_2(S) = 0$.

Corollaire : Si S est unirationnelle ($\exists \mathbb{P}^2 \dashrightarrow S$ dominant)

$\Rightarrow S$ est rationnelle.

Démo : $\exists R \to S$ surjectif ou R : éclatements de $\mathbb{P}^2$

$\Rightarrow R$ rationnelle $q(R) = P_2(R) = 0$ donc $q(S) = P_2(R) = 0$.

Prop V.6 : Si S surface minimal avec $q = P_2 = 0$, alors

$\exists$ courbe rat. lisse C sur S tq $C^2 \geq 0$.

Prop V.6 $\Rightarrow$ Castelnuovo :

RR pour C : $\chi(\mathcal{O}_S(C)) = \underbrace{\chi(\mathcal{O}_S)}_{h^0(\mathcal{O}_S) - h^1(\mathcal{O}_S) + h^2(\mathcal{O}_S)} + \frac{1}{2}(C^2 - C.K)$

$$h^0(\mathcal{O}_S) = 1, \quad h^1(\mathcal{O}_S) = q = 0, \quad h^2(\mathcal{O}_S) = P_1 = 0 \text{ (Remarque)}$$

$\Rightarrow 0 = g(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(C^2 + C.K)$

$\Rightarrow \chi(\mathcal{O}_S(C)) = 2 + C^2 \geq 2$

$\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_S(C)) + h^0(K-C) \geqslant 2$

or $h^0(K-C) \leq \underset{p_1}{\overset{\shortparallel}{h^0(K)}} = 0$

donc $h^0(C) \geqslant 2 \Rightarrow \exists D \in |C|$ tq $D \neq C$

Le pinceau engendré par C et D définit $S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$

puis $\hat{S} \to \mathbb{P}^1$ tq une fibre $\simeq C \simeq \mathbb{P}^1$

(Nœther-Enriques) $\Rightarrow \hat{S} \overset{\sim}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \overset{\sim}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^2$. ∎

<u>Lemme V.8.</u> Si S surface minimale avec $K^2 < 0$ alors $\forall a > 0$

$\exists D$ effectif tq $K \cdot D \leq -a$ et $|K+D| = \emptyset$.

<u>Dém.</u>: Il suffit de m.q : $\exists E$ effectif tq $K \cdot E < 0$

En effet : alors $\exists$ composante C de E tq $K \cdot C < 0$

Formule de genre : $g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K)$

$\Rightarrow C^2 \geqslant -1$ et égalité $\Leftrightarrow$ C courbe exceptionnelle

exclus !

$\Rightarrow C^2 \geqslant 0$

Mais, $(aC + nK) \cdot C < 0$ si $n >> 0$.

donc $|aC + nK| = \emptyset$ (Remarque utile : sinon $\exists D \geqslant 0$, $D \sim aC + nK$ tq $D \cdot C \geqslant 0$, car $C^2 \geqslant 0$)

$\exists n$ tq $|aC + nK| \neq \emptyset$

et $|aC + (n+1)K| = \emptyset$

Soit $D \in |aC + nK|$ alors $K \cdot D = a\underbrace{(K \cdot C)}_{<0} + n\underbrace{K^2}_{<0} \leq -a$

et $|K+D| = \emptyset$

Montrons qu'il existe $E \geq 0$ tq $K \cdot E < 0$.

Soit H section hyperplane.

- Si $K \cdot H < 0$ on prend $E = H$
- Si $K \cdot H = 0$, $|K + nH| \neq \emptyset$ si $n >> 0$ (théorème de Serre)

On prend $E \in |K + nH| \Rightarrow K \cdot E = K^2 < 0$.

- Si $K \cdot H > 0$ on pose $r_0 = \dfrac{K \cdot H}{-K^2}$

$$(H + r_0 K)^2 = H^2 + \frac{(K \cdot H)^2}{-K^2} > 0$$

$$(H + r_0 K) \cdot K = 0$$

Si r rationnel $> r_0$ proche de r_0

$(H + rK)^2 > 0$

$(H + rK) \cdot K < 0$

$(H + rK) \cdot H > 0$ car $H \cdot K > 0$, $H^2 > 0$

$r = \frac{p}{q}$, on pose $D_m = mq(H + rK)$

$D_m^2 > 0$, $D_m \cdot K < 0$

RR : $h^0(D_m) + h^0(K - D_m) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D_m^2 - D_m \cdot K) \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$

$(K - D_m) \cdot H < 0$ si $m >> 0$

$\Rightarrow h^0(K - D_m) = 0$ si $m >> 0$ (Rem. utile)

$h^0(D_m) > 0$ si $m >> 0$, $|D_m| \neq \emptyset$

On prend $E \in |D_m| \Rightarrow E \cdot K < 0$ ∎

Démo de V.6 :

Il suffit de m.q : $\exists D$ effectif tq $K\cdot D<0$ et $|K+D|=\emptyset$.

Alors : $\exists$ composante C de D tq $K.C<0$ et $|K+C|=\emptyset$.

RR à $K+C$:

$$h^0(K+C)+h^0(-C)\geq 1+\frac{1}{2}(C^2+C\cdot K)=g(C)$$

$$\left.\begin{array}{l} h^0(K+C)=0 \\ h^0(-C)=0 \end{array}\right. \Rightarrow g(C)$$

C courbe rationnelle lisse et $C\cdot K<0$

$C^2\geq -1$ et egalité $\Leftrightarrow$ C courbe exceptionnelle, donc $C^2\geq 0$ ✓

•) si $K^2<0$ c'est le lemme précédent

•) si $K^2=0$: RR à $-K$

$$h^0(-K)+\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{h^0(2K)}\geq \chi(\mathcal{O}_S)+\frac{1}{2}\left((-K)^2-(-K)\cdot K\right)=1+K^2$$

$\Rightarrow |-K|\neq\emptyset$ si $K^2\geq 0$

si H section hyperplane, $\exists n$ tq $|H+nK|\neq\emptyset$ car $(-K)\cdot H>$

$|H+(n+1)K|=\emptyset$ ~~lemme~~ utile

On prend $D\in|H+nK|$ alors $|K+D|=\emptyset$ et $K\cdot D=K\cdot H<0$

•) si $K^2>0$, $h^0(-K)\geq 2$

Sup. $\exists D\in|-K|$ réductible $D=A+B$

$D\cdot K<0\Rightarrow A\cdot K<0$ (ou $B\cdot K<0$)

et $|K+A|=|-B|=\emptyset$

Sinon : tout $D\in|-K|$ est irréd.

Soit H div. effectif, $\exists n$ $|H+nK|\neq\emptyset$

$|H+(n+1)K|\neq\emptyset$

Deux cas :

1) $\exists H, n$ tq $H + nK \not\equiv 0$

Soit $E \in |H + nK|$

$E = \sum n_i C_i$

$K \cdot E = -D.E$ et $D.E \geqslant 0$

E effectif, $D \in |-K|$ irréd, $D^2 = (-K)^2 \geqslant 0$

donc $D \cdot E \geqslant 0$ donc $\exists i$ $K \cdot C_i \leq 0$

On pose $C = C_i$

$|K + E| = |H + (n+1)K| = \phi$ donc $|K + C| = \phi$

$\underset{RR}{\Rightarrow}$ $g(C) = 0$ ($\approx$ Preuve Prop V.6)

Formule du genre : $C^2 = -2 - K.C$

si $K \cdot C = -2 \Rightarrow C^2 \geqslant 0$ ✓

si $K \cdot C = -1 \Rightarrow C^2 = -1$ exclus !

si $K \cdot C = 0 \Rightarrow C^2 = -2$

$h^0(2K + C) \leq h^0(K + C) = 0$

RR à $-K - C$: $h^0(-K-C) \geqslant 1 + \frac{1}{2}((K+C)^2 + K(K+C))$

$$= 1 + \frac{1}{2}(C^2 + 3K \cdot C + 2K^2)$$

$h^0(-K - C) \geqslant K^2 \geqslant 1$

$C^2 = -2$ donc $C \not\equiv -K$, $A \in |-K - C|$

$\exists A$ effectif $\not\equiv 0$ tq $A + C \in |-K|$

et : $|-K|$ contient un diviseur réductible, contradiction.

2) Cas où tout diviseur effectif est un multiple de K :

$\mathrm{Pic}(S) = \mathbb{Z}[K]$.

$$0 \to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{H^1(S, \mathcal{O}_S)} \to \mathrm{Pic}(S) \to H^2(S, \mathbb{Z}) \to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{H^2(S, \mathcal{O}_S)} \to 0$$

$H^2(S,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[K] \Rightarrow b_2 = 1$

Dualité de Poincaré non-dégénérée $H^2(S,\mathbb{Z}) \times H^2(S,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$

donc $K^2 = \pm 1$. Ici : $K^2 = 1$.

Noether : $\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K^2 + \chi_{top}(S))$

$$\underset{1}{\shortparallel} \quad = \frac{1}{12}(\underset{1}{K^2} + 2 - 2b_1 + \underset{1}{b_2})$$

$\Rightarrow b_1 = -4$ ↯ ■

<u>Théorème</u> : Si S surface rationnelle minimale, alors $\mathbb{P}^2$ ou $\mathbb{F}_n$ $(n \neq 1)$

<u>Démo</u> : Soit H section hyperplane

$A = \{C$ courbe rationnelle lisse tq $C^2 \geq 0\} \neq \emptyset$

$m = \min\{C^2 / C \in A\}$

$A_m = \{C / C^2 = m\}$

$C \in A_m$ tq $C.H$ minimal

•) On m.q : tout diviseur $D \in |C|$ est une courbe rationnelle lisse

$D = \sum n_i C_i$

Genre : $C^2 = -2 - K\cdot C \Rightarrow (K+C)\cdot C = -2$

donc $h^0(K+D) = h^0(K+C) = 0$

donc $h^0(K+C_i) = 0 \ \forall i$

RR à $K+C_i$: $h^0(-C_i) = 0$

$h^0(K+C_i) \geq 1 + \frac{1}{2}(C_i^2 + C_i\cdot K) = g(C_i)$

$\Rightarrow C_i$ courbe rat. lisse

$K\cdot C < 0 \Rightarrow \exists i$ tq $K\cdot C_i < 0 \Rightarrow C_i^2 \geq 0$ (C_i pas except)

On pose $D' = \sum_{j \neq i} n_j C_j$; $D = n_i C_i + D'$

$D' \cdot C_i \geqslant 0 \Rightarrow C^2 = D^2 = \underbrace{n_i^2 C_i^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{n_i (C_i \cdot D')}_{\geqslant 0} + D \cdot D'$

$D \cdot D' = C \cdot D' \geqslant 0$

donc $m = C^2 \geqslant n_i^2 C_i^2 \geqslant 0$

m minimal $\Rightarrow C_i^2 = m$ et $n_i = 1$

$H \cdot C = n_i H \cdot C_i + H \cdot D'$

$H \cdot C$ minimal $\Rightarrow H \cdot D' = 0 \Rightarrow D' = 0$ et $D = C_i$ ✓

•) On m. q. $\dim |C| \leq 2$

Si ~~[illegible]~~ $p \in S$, $\dim(\mathcal{O}_p / m_p^2) = 3$

Le système linéaire des courbes de $|C|$ passant par p avec mult $\geqslant 2$ (i.e. sing en p) est de codim ≤ 3 dans $|C|$

Ceci est $\neq \phi$ si $\dim |C| \geqslant 3$.

Soit $C_0 \in |C|$,

$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(C) \to \mathcal{O}_{C_0}(m) \to 0$

~~[illegible]~~ $H^1(\mathcal{O}_S) = 0 \Rightarrow h^0(\mathcal{O}_S(C)) = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{h^0(\mathcal{O}_S)}} + h^0(\mathcal{O}_{C_0}(m))$

$\Rightarrow h^0(C) = m+2$

$|C|$ n'a pas de point de base sur C_0

et C sans point de base.

2 possibilité

$m = 0$: $|C|$ définit $S \to \mathbb{P}^1$ tq fibres $\in |C|$

$\Rightarrow S$ geom. reglée $/\mathbb{P}^1$ ✓

$\underline{m = 1}$: $|C|$ définit $f : S \to \mathbb{P}^2$ tq fibres $\simeq$ intersection de ~~[illegible]~~ courbes $\neq$ de $|C|$

$C^2 = 1 \Rightarrow$ isomorphisme ■