Exposé 6 : Applications du théorème de Castelnuovo

Rappels :

•) Tore complexe : $T = V/\Gamma$, où V $\mathbb{C}$-esp. vect et $\Gamma \subseteq V$ reseau tq $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong V$

$\iota : T \hookrightarrow \mathbb{P}^N$: variété abélienne

•) $\forall p \in T$, $T_p(V/\Gamma) \simeq T_0(V/\Gamma) \simeq V$

$\Rightarrow T_T \simeq V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T$ et $\Omega^1_T \simeq V^* \otimes \mathcal{O}_T$

En particulier, $\delta : V^* \xrightarrow{\sim} H^0(T, \Omega^1_T)$ est un isomorphisme.
$x^* \mapsto dx^*$

(Bien défini : $x^* \in V^* \Rightarrow x^*(v+\gamma) = x^*(v) + $ cte $\forall v \in V$, $\gamma \in \Gamma$.)

•) $V \to V/\Gamma$ revêtement universel $\Rightarrow \Gamma = \pi_1(T) = H_1(T, \mathbb{Z})$

Explicitement, $h : \Gamma \xrightarrow{\sim} H_1(T, \mathbb{Z})$
$\gamma \mapsto (t \mapsto t\gamma)_{0 \le t \le 1}$

$$\Rightarrow \int_{h\gamma} \delta x^* = \int_0^1 d\langle x^*, t\gamma\rangle = \langle x^*, \gamma\rangle \quad \forall x^* \in V^*, \gamma \in \Gamma.$$

Prop : Soient $T_1 = V_1/\Gamma_1$, $T_2 = V_2/\Gamma_2$ et $u : T_1 \to T_2$ morphisme.
Alors, u est la composée d'une translation et d'un homo. de groupes $a : T_1 \to T_2$; a est induit par $\bar{a} : V_1 \to V_2$ linéaire tq $\bar{a}(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2$.
En particulier, a est déterminée par $u^* : H^0(T_2, \Omega^1_{T_2}) \to H^0(T_1, \Omega^1_{T_1})$.

Preuve :

Rév. univ. : $\bar{u} : V_1 \to V_2$ tq $\bar{u}(x+\gamma) - \bar{u}(x) \in \Gamma_2$ pour $x \in V_1$, $\gamma \in \Gamma_1$

$\Rightarrow \bar{u}(x+\gamma) - \bar{u}(x)$ indep. de x

$\Rightarrow$ Dérivées partielles de $\bar{u}$ invariantes par Γ_1 : déf. des fonct. holomorphes dans T_1 $\Rightarrow$ constantes (Liouville)

$\Rightarrow \bar{u}$ de la forme $\bar{u}(x) = \bar{a}(x) + b$, avec

$\bar{a} : V_1 \to V_2$ homomorphisme et $b \in V_2$

$\bar{a}(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2$ $\Rightarrow$ $\bar{a}$ induit $a : T_1 \to T_2$

Finalement,
$u^* : H^0(T_2, \Omega^1_{T_2}) \simeq V_2^* \longrightarrow H^0(T_1, \Omega^1_{T_1}) \simeq V_1^*$ est la transposée de $\bar{u}$ ∎

Thm : Soit X proj. lisse. Alors, $\exists$ var. abélienne A et un morphisme $\alpha : X \to A$ tq

"$\forall T$ tore complexe et tout morphisme $f : X \to T$, $\exists ! \tilde{f} : A \to T$ tq $\tilde{f} \circ \alpha = f$"

A est unique à isom. près $:= Alb(X)$ variété de Albanese.

α induit un isomorphisme $\alpha^* : H^0(A, \Omega^1_A) \to H^0(X, \Omega^1_X)$.

En particulier, $\dim Alb(X) = h^0(X, \Omega^1_X)$.

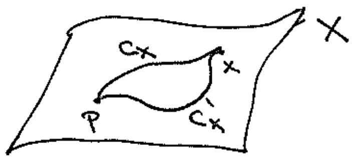
Preuve :

•) D'après la théorie de Hodge : soit

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H^0(X, \Omega^1_X)^*$$
$$\gamma \longmapsto \int_\gamma$$

$\Rightarrow H = Im(i)$ est un réseau dans $\Omega^* = H^0(X, \Omega^1_X)^*$, avec $A = \Omega^*/H$ var. ab.

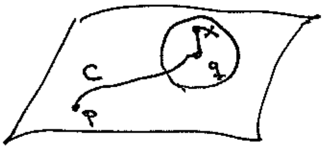
•) $\underline{\alpha}$: Soit $p \in X$



$a(c_x) \in \Omega^*$ déf. par $\omega \mapsto \int_{c_x} \omega$

$a(c_x) - a(c_x') \in H \Rightarrow \alpha(x) = [a(c_x)] \in A$ bien définie

•) α analytique dans un voisinage de $q \in X$:



$\mathcal{U} \simeq \mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{C}^n$

droite $[q, x]$ dans $\mathbb{B}^n$ (varié analytiquement avec x)

c_x : "$c + [q, x]$"

$x \in \mathcal{U}$, $a(x) = a(c_x)$; $a : \mathcal{U} \to \Omega^*$ analytique

$\alpha|_{\mathcal{U}} = \pi \circ a$, où $\pi : \Omega^* \to A = \Omega^*/H$ $\Rightarrow$ α analytique dans $\mathcal{U}$, avec $\alpha(p) = 0$.

•) $\underline{\alpha^* \text{ isom}}$: $\delta : \Omega = (\Omega^*)^* \to H^0(A, \Omega^1_A)$ isom. $(A = \Omega^*/H)$

$\Leftrightarrow \delta : H^0(X, \Omega^1_X) \to H^0(A, \Omega^1_A)$ isom.

m.q : $\alpha^*(\delta\omega) = \omega$, $\forall \omega \in \Omega$

Localement : $\alpha = \pi \circ a$, $\alpha^*(\delta\omega) = a^* \pi^*(\delta\omega) = a^* d(\langle \omega, \cdot \rangle)$

$x \in X$: $d(\langle \omega, a(x) \rangle) = d\left(\int_p^x \omega\right) = \omega(x)$ ✓

•) <u>Prop. universelle</u>: Soit $T = V/\Gamma$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & T = V/\Gamma \\ A = \Omega^*/H \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde f\, ?"'] & \end{tikzcd}$$

i) $\tilde f$ unique:

$$\begin{tikzcd} H^0(X,\Omega^1_X) \arrow[d, "\alpha^*", "\wr"'] & H^0(T,\Omega^1_T) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[dl, "\tilde f^*"] \\ H^0(A,\Omega^1_A) & \end{tikzcd}$$

α^* isom $\Rightarrow$ $\tilde f^*$ unique $\Rightarrow$ $\tilde f$ unique à translation près. On fixe $\tilde f(0) = f(p)$ ✓

ii) $\tilde f$ existe:

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[r, "\delta", "\sim"'] \arrow[rr, bend right, "u"'] & H^0(T,\Omega^1_T) \arrow[r, "f^*"] & \Omega \end{tikzcd}$$

$\underline{M.q}$: ${}^t u(H) \subseteq \Gamma$.

Soit $\gamma \in H_1(X,\mathbb{Z})$, $v^* \in V^*$ $\quad$ ($h : \Gamma \xrightarrow{\sim} H_1(T,\mathbb{Z})$; $\gamma \mapsto (t \mapsto t\gamma)_{0 \le t \le 1}$)

$\Rightarrow \langle {}^t u(i(\gamma)), v^* \rangle = \langle i(\gamma), u(v^*) \rangle = \int_\gamma f^*(\delta v^*) = \int_{f_*\gamma} \delta v^* = \langle \underbrace{h^{-1}(f_*\gamma)}_{\in\,\Gamma}, v^* \rangle$ ∎

<u>Rmq</u>: 1) Si $h^0(X,\Omega^1_X) = 0$ (eg. $X = \mathbb{P}^n$ ou $X = S$ avec $q(S) = 0$)

$\Rightarrow$ Tout $f : \underset{\text{tore}}{T} \to X$ est constant !

2) Fonctorialité : $f : X \to Y \Rightarrow F : Alb(X) \to Alb(Y)$.

3) Prop. universelle $\Rightarrow$ La sous-var. abélienne engendrée par $\alpha(X)$ est $Alb(X)$ toute entière.

"$Alb(X)$ est engendrée par $\alpha(X)$"

En part, •) $Alb(X) \neq (0) \Rightarrow \alpha(X)$ n'est pas un point.

•) $f : X \to Y$ surjectif $\Rightarrow F : Alb(X) \to Alb(Y)$ surjectif

4) Si X est une courbe $\Rightarrow Alb(X) = JX$ (Jacobienne)

5) $\alpha_* : H_1(X,\mathbb{Z}) \to H_1(A,\mathbb{Z})$ surjectif ; $\ker(\alpha_*) = Tor(H_1(X,\mathbb{Z}))$

$\Rightarrow$ L'image réciproque d'un revêtement étale connexe de A par α, est connexe.

<u>Prop</u>: Soit S surface et $\alpha : S \to Alb(S)$ morphisme de Albanese.

Si $\alpha(S)$ est une courbe $C \Rightarrow C$ lisse, $g(C) = q(S)$ et les fibres de α sont connexes.

<u>Lemme</u>: Supp. $\exists$ factorisation

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & T \arrow[r, "j"] & Alb(S) \end{tikzcd}$$

avec f surjectif

$\Rightarrow \tilde j : Alb(T) \xrightarrow{\sim} Alb(S)$ isom.

<u>Preuve</u>:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & T \arrow[d, "\alpha_T"] \arrow[dr, "j"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "///"] & \\ Alb(S) \arrow[r, two heads, "F"] & Alb(T) \arrow[r, "\tilde j"] & Alb(S) \end{tikzcd}$$

Prop. universelle : $\tilde j \circ F = Id$ ∎

Preuve de la Prop : Soit $N \xrightarrow{\nu} C$ normalisation.

S normale : $S \xrightarrow{f} N \xrightarrow{j} \mathrm{Alb}(S)$ factorisation $\Rightarrow \tilde{j} : JN \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alb}(S)$ isom.

$$\underbrace{S \xrightarrow{f} N \xrightarrow{j} \mathrm{Alb}(S)}_{\alpha}$$

$\alpha_N : N \hookrightarrow JN$ plongement $\Rightarrow j$ plongement $\Rightarrow N = C$ (lisse) avec

$g(C) = \dim JN = \dim \mathrm{Alb}(S) = q(S)$.

Rappel (factorisation de Stein) :
Soit $f : X \to Y$ morphisme propre (entre variétés ou schémas). Alors, il existe une factorisation $\underbrace{X \xrightarrow{p} \tilde{Y} \xrightarrow{g} Y}_{f}$, avec $g : \tilde{Y} \to Y$ fini et $p : X \to \tilde{Y}$ surjectif avec fibres connexes.

Soit $\underbrace{S \xrightarrow{p} \tilde{C} \xrightarrow{g} C}_{\alpha}$ factorisation de Stein de α.

Normalisation finie : On peut supposer $\tilde{C}$ lisse

$\Rightarrow G : J\tilde{C} \xrightarrow{\sim} JC \Rightarrow g : \tilde{C} \xrightarrow{\sim} C$ isom. (Torelli) ∎

Lemme : Soit S une surface avec $p_g = h^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$ et $q = h^1(S, \mathcal{O}_S) \geq 1$,
$\alpha : S \to \mathrm{Alb}(S)$ morphisme de Albanese $\Rightarrow \alpha(S)$ est une courbe.

Preuve. Si $\alpha(S)$ est une surface $\Rightarrow \bar{\alpha} : S \to \alpha(S)$ génériquement fini.

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{U} \subseteq \alpha(S)$ ouvert tq $\bar{\alpha}$ étale au-dessus de $\mathcal{U}$.

$x \in \mathcal{U} \Rightarrow \alpha(S)$ lisse en x

Soient $u_1, \ldots, u_q$ coord. locales dans $\mathrm{Alb}(S)$ centrées en x, tq
$\alpha(S) : (u_3 = \ldots = u_q = 0)$ localement.

$A = \mathrm{Alb}(S)$ variété parallélisable : $T_A \simeq \Omega^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_A$ (trivial)

$\Rightarrow \exists\, \omega \in H^0(A, \Omega^2_A)$ tq $\omega(x) = (du_1 \wedge du_2)(x) \neq 0$

$\Rightarrow 0 \neq \alpha^* \omega \in H^0(S, \Omega^2_S)$, contradiction avec $p_g = 0$ ∎

Théorème : Soient S et S' deux surfaces minimales non-reglées. Alors tout $S' \dashrightarrow S$ birat. est un isomorphisme.
En particulier, toute surface non-reglée possède un unique modèle minimal (à isom. près) ; $\mathrm{Bir}(S) = \mathrm{Aut}(S)$ si S minimale non-reglée.

<u>Preuve</u> : Soit

$$\begin{tikzcd} & & \hat{S} \arrow[dl, "\varepsilon_n"'] \arrow[dd, "f"] \\ & \cdot \arrow[dl, dashed, "\varepsilon_1"'] & \\ S' \arrow[rr, dashed, "\phi", "\sim"'] & & S \end{tikzcd}$$

résolution de ϕ

(ε_i éclatement et f morphisme)

Sup. n minimal, si $n = 0$ ✓. Sup. $n \geq 1$.

Soit $E = \mathrm{Exc}(\varepsilon_n) \subseteq \hat{S}$ $\Rightarrow$ $f(E)$ est une courbe $C \subseteq S$.

(sinon f se factorise $f^* \circ \varepsilon_n$, contradiction avec n minimal)

↳ Prop. univ. éclatement

[Rmq : $\varepsilon : \hat{X} = Bl_p(X) \to X$, X surface lisse

$\hat{\Gamma} \subseteq \hat{X}$ courbe irréd. tq $\varepsilon(\hat{\Gamma}) = \Gamma$ courbe $\subseteq X$

$$\Rightarrow K_{\hat{X}} \cdot \hat{\Gamma} = (\varepsilon^* K_X + E)(\varepsilon^* \Gamma - mE) \quad \text{avec } m = E \cdot \hat{\Gamma}$$

$$= K_X \cdot \Gamma + m \geq K_X \cdot \Gamma$$

Egalité $\Leftrightarrow$ $\hat{\Gamma}$ n'intersecte pas E]

$\Rightarrow K_S \cdot C \leq K_{\hat{S}} \cdot E = -1$

Egalité $\Leftrightarrow$ E n'intersecte pas les courbes contractées par f

$\Rightarrow f|_E : E \xrightarrow{\sim} C$ isom. $\Rightarrow$ C courbe rat. avec $K_S \cdot C = -1$ ↯

$\Rightarrow K_S \cdot C \leq -2 \Rightarrow C^2 \geq 0$

$\Rightarrow P_m = 0 \quad \forall m \geq 1$ (sinon $D \in |mK_S| \Rightarrow D \cdot C \geq 0$ Rmq utile $\Rightarrow K_S \cdot C \geq 0$ ↯)

•) $q = 0$: Castelnuovo $\Rightarrow$ S rationnelle ↯

•) $q > 0$: Albanese donne $\varphi : S \to B$ surjectif à fibres connexes

avec B courbe lisse de genre q.

C rationnelle $\Rightarrow$ $C \subseteq F$ fibre de φ

$C^2 \geq 0 \Rightarrow F = rC$ (F irréductible)

et donc $C^2 = 0 \Rightarrow K_S \cdot C = -2$

Formule du genre : $r = 1$ et $g(F)$

Noether-Enriques $\Rightarrow$ S réglée, contradiction. ■