Lemme : a) Soit S tq $p_g = 0$ et $q \geqslant 1 \Rightarrow K_S^2 \leq 0$ et $K_S^2 < 0$ sauf si $q = 1$ et $b_2 = 2$.

b) Soit S minimale avec $K^2 < 0 \Rightarrow p_g = 0$ et $q \geqslant 1$.

Preuve : $b_1 = 2q$; Noether : $12\chi(\mathcal{O}_S) = 12 - 12q + 12p_g = K_S^2 + \chi_{top}(S)$
$= K_S^2 + 2 - 4q + b_2$

a) $\Rightarrow K_S^2 = 10 - 8q - b_2$.

Mq : $b_2 \geqslant 2$ si $q = 1$: $\alpha : S \to B = \mathrm{Alb}(S)$ courbe elliptique

Soient $f \in H^2(S, \mathbb{Z})$ classe d'une fibre gen. de α et h classe d'une section hyperplane

$f^2 = 0$, $h \cdot f > 0 \Rightarrow b_2 \geqslant 0$ (elles sont l.i).

b) Sup. $p_g \neq 0$ et soit $D \in |K_S|$, $D = \sum n_i C_i$, $n_i > 0$

$K_S \cdot D = K_S^2 < 0 \Rightarrow K_S \cdot C_i < 0$ pour certain i.

$C_i \cdot C_j \geqslant 0$ pour $i \neq j \Rightarrow C_i^2 < 0 \Rightarrow C_i$ exceptionnelle, contr.

Pareil : $P_n = 0$ $\forall n \geqslant 1$. Si $q = 0 \overset{\text{castelnuovo}}{\Rightarrow} S$ rationnelle

S rat. minimale $\Rightarrow S \simeq \mathbb{P}^2 \Rightarrow K_S^2 = 9$
ou $S \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \Rightarrow K_S^2 = 8$ ∎

Thm A : Soit S minimale tq $K_S^2 < 0 \Rightarrow S$ est reglée.

Preuve : $K_S^2 < 0 \Rightarrow p_g = 0$ et $q \geqslant 1 \Rightarrow \varphi : S \to B = \mathrm{Alb}(S)$ à fibres connexes ; B courbe lisse.

et $|K_S+C|=\phi$ $\Rightarrow p|_C$ étale, et un isom. si $q\geq 2$. Alors, $g(C)=q$.

Raison: RR à K_S+C:

$0=h^0(K_S+C)\geq \chi(\mathcal{O}_S)+\frac{1}{2}(C^2+C\cdot K_S)=1-q+g(C)-1 \Rightarrow g(C)\leq q$.

S minimale: $C^2\geq 0$ $\Rightarrow$ $C \not\subset$ fibres non irréd. de φ

~~Mais~~ si C est une fibre de p $\Rightarrow C^2=0$ $\Rightarrow C\cdot K_S=-2$ et $g(C)=0$

$\Rightarrow$ S reglée par Noether Enriques.

Alors, $p(C)=B$. Soit $\nu: N\to C$ normalisation. $\rightsquigarrow$ revêtement ramifié $N\to B$ de degré d

Riemann-Hurwitz: $g(N)=1+d(g(B)-1)+\frac{r}{2}$

r = nb. pts de branchement avec mult.

$\Rightarrow$ $q\geq g(C)\geq g(N)\geq 1+d(q-1)$.

$\Rightarrow$ Soit $d=1$ ou $q=1$ et $C=N$ ✓

$\hookrightarrow C\simeq B$ $\quad\hookrightarrow g(C)=1$.

2°) $\exists C\subseteq S$ courbe irréd tq $K_S\cdot C<-1$ et $|K_S+C|=\phi$.

Raison: S minimale tq $K_S^2<0$ $\Rightarrow$ $\exists D\geq 0$ tq $|K_S+D|=\phi$ et $K_S\cdot D<-1$.

Sup. $D=\sum_{i=1}^{r} n_i C_i$, $n_i>0$. Quitte à enlever des C_i, on peut sup. $K\cdot C_i<0$ $\forall i$. m.q. D est donc irréd:

•) si $n_i\geq 2$ pour cert. i $\Rightarrow |K_S+2C_i|=\phi$

RR: $0=h^0(2C_i+K_S)\geq 1-q+2(C_i^2+C_i\cdot K_S)-C_i\cdot K_S$

1°): $C_i^2+C_iK_S=2(q-1)$ $\Rightarrow$ $0>3(q-1)$, contradiction.

•) si $r\geq 2$ $\Rightarrow |K_S+C_1+C_2|=\phi$

1°) $0=h^0(K_S+C_1+C_2)=(q-1)+h^1(K_S+C_1+C_2)+C_1\cdot C_2$

si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$: $0 \to \mathcal{O}_S(-C_1-C_2) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2} \to 0$

$\Rightarrow \underset{(q \geq 1)}{H^1(S, \mathcal{O}_S(-C_1-C_2))} \neq 0 \Rightarrow h^1(S, K_S + C_1 + C_2) \neq 0$, contr.

3°) Soit $C \subseteq S$ courbe irréd tq $C \cdot K_S < -1$ et $|K_S + C| = \emptyset$.

Sup. que C est une section de p. RR :

$$h^0(C) \geq 1 - q + \tfrac{1}{2}(C^2 - C\cdot K_S) \underset{q = g(C)}{=} -C\cdot K_S \geq 2 \qquad \left[g(C) = 1 + \tfrac{1}{2}(C^2 + K\cdot C) \right]$$

C bouge dans $|C|$. Soit F fibre gén. de p.

$\Rightarrow C \cap F$ bouge linéairement dans $F \Rightarrow F$ rationnelle, contr $\lightning$

Sup. $q = 1$ et $p|_C$ étale. L'inclusion $i : C \hookrightarrow S$ définit une section $e : C \hookrightarrow S \times_B C$. Soit S' la comp. connexe de $S \times_B C$ qui contient $C' := e(C)$.

$p|_C$ étale $\Rightarrow \pi : S' \to S$ projection est étale.

$\Rightarrow$ Pas de (diviseur de) ramification : $K_{S'} \equiv \pi^* K_S$
et $\Omega^1_{S'} \cong \pi^* \Omega^1_S$.

$\Rightarrow K_{S'} \cdot C' = \deg_{C'}(e^* K_{S'}) = \deg_C(i^* K_S) = K_S \cdot C < -1$

$\Rightarrow p_g(S') = 0$. RR : $h^0(C') \geq \chi(\mathcal{O}_{S'}) - 1 + \underset{1 = q}{g(C')} - K_{S'} \cdot C'$.

Lemme : Soit S surface, B courbe lisse et $p : S \to B$ surjectif.

Soit $\Sigma \subseteq B$ l'ensemble (fini) de point tq p n'est pas lisse au-dessus Σ, soit $\eta \in B - \Sigma$. Notons $F_b = p^{-1}(b)$, $b \in B$. Alors,

$$\chi_{top}(S) = \chi_{top}(B)\,\chi_{top}(F_\eta) + \sum_{s\in\Sigma} \left(\chi_{top}(F_s) - \chi_{top}(F_\eta)\right). \blacksquare$$

Lemme : Soit C une courbe réduite (pas forcément irréd). Alors,

$\chi_{top}(C) \geq 2\chi(\mathcal{O}_C)$; égalité $\iff$ C est lisse.

Prop : Soit S surface minimale tq $p_g = 0$, $q = 1$ et $K_S^2 = 0$.

Soit $p : S \to B$ le morphisme de Albanese, où B courbe elliptique. et g est le genre d'une fibre generique de p. Alors,

- •) $g \geq 2 \Rightarrow p$ lisse
- •) $g = 1 \Rightarrow$ les fibres singulieres sont de la forme $F_b = nE$, où E courbe elliptique lisse.

Preuve : $b_2 = 2 \Rightarrow p$ a fibres irréd.

Sup. $F_b = F_1 + F_2$. Soit H section hyperplane et soit F fibre gen.
$\alpha H + \beta F_1 + \gamma F_2 = 0$ dans $H^2(S, \mathbb{Z})$

$H\cdot F \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0$. et donc $F_2 = rF_1$, $r \in \mathbb{Q}$.
$F_2 \cdot H = r F_1 \cdot H > 0 \Rightarrow r > 0$
$F_2 \cdot F_1 \geq 0 \Rightarrow r < 0 \quad \Rightarrow b_2 \geq 3$, contradiction.
$\quad \overset{\|}{r\underbrace{F_1^2}_{<0}}$

Supposons $F_s = nC$, $n \geq 1$, C irréd.

$$2\chi(\mathcal{O}_C) = \underbrace{-C^2}_{=0} - C.K_S = -\frac{1}{n}F_s\cdot K_S = -\frac{1}{n}F_\eta\cdot K_S = \frac{2}{n}\chi(\mathcal{O}_{F_\eta})$$
$$= \frac{1}{n}\chi_{top}(F_\eta)$$

$g \geq 1 \Leftrightarrow \chi_{top}(F_\eta) \leq 0$

$\chi_{top}(F_s) \geq \chi_{top}(F_\eta)$, avec égalité $\Leftrightarrow \begin{cases} \chi_{top}(C) = 2\chi(\mathcal{O}_C) & \text{et} \\ \frac{1}{n}\chi_{top}(F_\eta) = \chi_{top}(F_\eta) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C \text{ lisse et} \\ n=1 \text{ ou } g = 1 = g(C). \end{cases}$

Si $s \in \Sigma$, $\chi_{top}(F_s) - \chi_{top}(F_\eta) \geq 0$, égalité $\Leftrightarrow F_s = nE$, E courbe elliptique et $g(F_\eta) = 1$.

$\chi_{top}(S) = 2 - 2b_1 + b_2 = 0$ et $\chi_{top}(B) = 0 \Rightarrow \sum_{s\in\Sigma} (\chi_{top}(F_s) - \chi_{top}(F_\eta)) = 0$

$\Rightarrow \chi_{top}(F_s) = \chi_{top}(F_\eta) \quad \forall s \in \Sigma$ ■

Si $(g=1)$ on peut se ramener au cas lisse quitte à considérer un revêtement de Galois ramifié :

<u>Lemme</u>: Soit $p : S \to B$ morphisme surjectif sur une courbe B tq ses fibres sont lisses ou bien multiples de courbes lisses. $\Rightarrow \exists$ revêtement de Galois ramifié $q : B' \to B$ avec group de Galois G, une surface S' et un diagramme

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{q'} & S \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{q} & B \end{array}$$

tq l'action de G sur B' s'étend à S' qui induit un isom

Prop : (par faire...) : Soit $\varphi : S \to B$ morphisme lisse, B courbe. F fibre de φ. Sup. que $g(B) = 1$ et $g(F) \geq 1$, ou bien $g(F) = 1$.

$\Rightarrow \exists\, B' \to B$ revêtement étale de Galois avec group G tq

- •) $\varphi' : S' = S \times_B B' \to B'$ est trivial, i.e., $S' \cong B' \times F$
- •) $S \cong (B' \times F)/G$. Voir. Beauville VI.8

Corollaire : Soit S minimale non-reglée tq $p_g = 0$, $q = 1$ et $K_S^2 = 0$.

Alors, $\exists$ courbes B, F de genre ≥ 1 et un group fini $G \subseteq \mathrm{Aut}(B)$, qui agit sur $B \times F$ de façon compatible avec l'action sur B, tq $S \cong (B \times F)/G$. La courbe B/G est elliptique ; si $g(F) \geq 2$ alors B est elliptique et G est un group de translations. ■

Lemme technique : Soient B, F courbes de genre ≥ 1 et $G \subseteq \mathrm{Aut}(B)$ qui agit sur $B \times F$ de façon compatible avec $G \curvearrowright B$.

i) Si $g(F) \geq 2$, alors G agit sur F et

$$g \cdot (b, f) = (gb, gf) \quad \text{pour } g \in G,\ b \in B,\ f \in F$$

Idée : $g \in G$, $b \in B \Rightarrow g \cdot (b, f) = (gb, \phi_g(b) \cdot f)$
où $\phi_g(b) \in \mathrm{Aut}(F)$ qui dépend de B de façon continue.
$g(F) \geq 2 \Rightarrow |\mathrm{Aut}(F)| < +\infty \Rightarrow \phi_g(b)$ indep. de b ✓

ii) Si $g(F) = 1$, $\exists\, \tilde{B} \to B$ rév. étale et H groupe qui agit sur $\tilde{B}$ et F tq
$\tilde{B}/H \cong B/G$ et $(\tilde{B} \times F)/H \cong (B \times F)/G$.

Voir Beauville VI.10.

et $q \geq 1$!

<u>Lemme</u>: Soit X var. lisse et $G \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ fini. Soit $\pi : X \to Y = X/G$ la projection nat et sup. que Y est lisse.
Alors les $\alpha \in H^0(X, (\Omega_X^p)^{\otimes k})^G$ sont de la forme $\pi^* \omega$, où $\omega \in H^0(Y, (\Omega_Y^p)^{\otimes k})$ tq $\pi^*\omega$ est regulière sur X.

<u>Preuve</u> (pour 1-formes): V variété : $\mathbb{C}(V)$ corps de fonct. rat.

$M\Omega_V^1$: 1-formes rat. sur V, $\dim_{\mathbb{C}(V)} M\Omega_V^1 = \dim V = n$.

M.q : $\pi^* : M\Omega_Y^1 \longrightarrow (M\Omega_X^1)^G$ est un isom.

Écrivons $M\Omega_Y^1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}(Y)}\{dy_1, \dots, dy_n\}$

$\Rightarrow \{\pi^* dy_1, \dots, \pi^* dy_n\}$ $\mathbb{C}(X)$-base de $M\Omega_X^1$

$\alpha = \sum A_i \pi^* dy_i$ $(A_i \in \mathbb{C}(X))$ est G-invariant
$\Leftrightarrow$ A_i est G-inv $\forall i \Longleftrightarrow A_i = \pi^* B_i$, $B_i \in \mathbb{C}(Y)$ $\forall i$

$\Rightarrow \alpha = \pi^*\omega$, où $\omega = \sum B_i dy_i$ ∎

<u>Ex</u>: 1) π étale (G agit librement), alors α regulière $\Leftrightarrow \pi^*\alpha$ reg.

$\Rightarrow \pi^* : H^0(Y, (\Omega_Y^p)^{\otimes k}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, (\Omega_X^p)^{\otimes k})^G$ isom.

2) <u>Courbes</u> : $\Omega_X^1 = \omega_X$. <u>Q</u>: $\alpha \in H^0(Y, \omega_Y^{\otimes k})$ tq $\pi^*\alpha \in H^0(X, \omega_X^{\otimes k})$?

Soit $p \in Y$ point de branchement, $\pi^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_s\}$
$\mathrm{ord}_{q_i}(\pi) = e_p = e$ (ordre de ram) ; $es = \deg \pi$

$\pi^* y = x_i$ près de q_i.

$\downarrow \pi$

$p : (y=0) \in Y$

$$\alpha = A y^{-r} (dy)^{\otimes k}, \quad A(p) \neq 0, \ r \in \mathbb{Z} \quad \text{près de } p$$

$$\Rightarrow \pi^* \alpha = \pi^* A \, x_i^{-re} (e x_i^{e-1} dx_i)^{\otimes k} = A_i \, x_i^{-re + k(e-1)} (dx_i)^{\otimes k}$$

avec $A_i(q_i) \neq 0$.

$\pi^* \alpha$ régulière $\Leftrightarrow -re + k(e-1) \geq 0$ et donc

$$\pi^* : H^0\Big(Y, \omega_Y^{\otimes k}\Big(\sum_{p \in Y} p\big[k(1 - \tfrac{1}{e_p})\big]\Big)\Big) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \omega_X^{\otimes k})^G \quad \text{isom.}$$

partie entière

<u>Thm B</u> : Soit S minimale non reglée tq $p_g = 0$ et $q \geq 1$. Alors, $S \cong (B \times F)/G$, où B, F courbes irrat. lisses, G gp fini qui agit fidèlement sur B et F ; B/G elliptique, F/G rationnelle et :

I : Soit B elliptique, et G est un gp de translations de B ;

II : Soit F elliptique, et G agit librement sur $B \times F$.

Reciproquement, chaque surface avec cettes propriétés ~~[illegible]~~ est minimale avec $p_g = 0$, $q = 1$, $K^2 = 0$ et est non-reglée.

<u>Preuve</u> : S minimale non reglée tq $p_g = 0$ et $q \geq 1$

$\Rightarrow K^2 = 0$ et $q = 1$.

$\Rightarrow S \cong (B \times F)/G$ où G agit sur B et F, B/G courbe elliptique

Soit B elliptique (cas I), soit F est elliptique (cas II) ;

G agit sur $B \times F$ librement et $\pi : B \times F \to S$ étale.

Notons que S est minimale non-réglée : $\pi : B \times F \to S$ étale

Sup $C \subseteq S$ courbe rat. $\Rightarrow \pi^{-1}(C)$ réunion de courbes rat

On aurait $R \to B$ ou $R \to F$, R courbe rat, contradiction.

Soit $\tilde{S} = B \times F$: $H^0(\tilde{S}, \Omega^1_{\tilde{S}}) \cong H^0(B, \omega_B) \oplus H^0(F, \omega_F)$

$\Rightarrow q(\tilde{S}) = g(B) + g(F)$

$H^0(\tilde{S}, \Omega^2_{\tilde{S}}) \cong H^0(B, \omega_B) \otimes H^0(F, \omega_F) \Rightarrow p_g(\tilde{S}) = g(B)\, g(F)$.

$\Rightarrow \chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = \chi(\mathcal{O}_B)\chi(\mathcal{O}_F) = 0$ car B ou F elliptique.

Si B elliptique $\Rightarrow \Omega^2_{\tilde{S}} \cong pr_2^* \omega_F \Rightarrow K^2_{\tilde{S}} = 0$ (pareil si F elliptique).

π étale $\Rightarrow \chi(\mathcal{O}_S) = 0$ et $K_S^2 = 0$, de plus

$$H^0(S, \Omega^1_S) \cong H^0(\tilde{S}, \Omega^1_{\tilde{S}})^G \simeq H^0(B, \omega_B)^G \oplus H^0(F, \omega_F)^G$$

$$\simeq H^0(B/G, \omega_{B/G}) \oplus H^0(F/G, \omega_{F/G})$$

B/G elliptique et $q = 1 \Rightarrow F/G$ rationnelle.

$\Rightarrow p_g(S) = 0$ car $\chi(\mathcal{O}_S) = 0$ ■