Exposé 8 : Surfaces avec $p_g = 0$ et $q \geq 1$ (partie II)

Rappel : Soit S minimal, non réglée, $p_g = 0$, $q \geq 1$ ($\Rightarrow K^2 = 0, q = 1, b_2 = 2$)

Alors, $S = (B \times F)/G$, B, F lisses non rationnelles.

G : groupe fini, agit fidèlement sur B et F

B/G elliptique, F/G rationnelle et

I) Soit B elliptique, G : translations de B

II) Soit F elliptique, $G \curvearrowright$ librement sur $B \times F$.

Ex des cas I :

B courbe elliptique, $G = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$

F : revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1$ de groupe G.

Rappel : Riemann - Hurwitz : $2g(F) - 2 = ab\,(2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_{p \in F} (e_p - 1)$

Lemme : G groupe finie $\curvearrowright X$ lisse dim n. Tq

$Y = X/G$ lisse, $\pi : X \to X/G$

Alors, p-formes k-tensorielles $(H^0(X, (\Omega_X^p)^{\otimes k})$ ~~...~~$^{\omega}$ sur X

invariantes par G $\longleftrightarrow$ Formes $\pi^*\omega$ holomorphes sur X tq

ω méromorphe sur Y.

Démo : $M\Omega^1$ formes meromorphes sur Y, ev dim n sur $\mathbb{C}(Y)$.

On mq $\pi^* : M\Omega^1_Y \to (M\Omega^1_X)^G$

$(\mathbb{C}(X))^G = \mathbb{C}(Y)$.

Si $dy_1, \dots, dy_n$ base de $M\Omega^1_Y$ sur $\mathbb{C}(Y)$, alors $(\pi^* dy_1, \dots, \pi^* dy_n)$

Base de $M\Omega^1_X$.

Sur X : $\alpha = \sum A_i \pi^* dy_i$, $A_i \in \mathbb{C}(X)$

α G-inv $\Leftrightarrow$ $\forall i$ A_i G-inv. $\Leftrightarrow$ $A_i = \pi^* B_i$, $B_i \in \mathbb{C}(Y)$.

$\Rightarrow \alpha = \pi^*(\sum B_i dy_i)$.

Ex. des courbes : $X \xrightarrow{\pi} Y = X/G$

$\alpha \in H^0(Y, (M\Omega_Y^1)^{\otimes K})$, $\pi^*\alpha$ holomorphe ?

Si $p \in Y$ point de ramification , $\pi^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_s\}$

G agit transitivement . Stabilisateur d'ordre e_p = indice de ramification.

$e \cdot s = |G|$

$\exists$ coord. locales y sur Y en p tq $\pi^* y = x_i^e$
x_i sur X en q_i

Loc. en p sur Y : $\alpha = \dfrac{A}{y^r} (dy)^{\otimes K}$

$$\Rightarrow \pi^*\alpha = \frac{A_i}{x_i^{re}} (e x_i^{e-1} dx_i)^{\otimes K} = B_i \, x_i^{K(e-1)-re} (dx_i)^{\otimes K}$$

holomorphe $\Leftrightarrow -re + K(e-1) \geq 0 \Leftrightarrow r \leq K\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

$$H^0(X, (\omega_X)^{\otimes K})^G \cong H^0\Big(Y, \omega_Y^{\otimes K} \otimes \sum_{p \in Y} p \cdot \Big[K\Big(1 - \frac{1}{e_p}\Big)\Big]\Big)$$

partie entière.

Théorème : Avec les hyp. précédentes.

1. Dans le deux cas $P_4 \neq 0$ ou $P_6 \neq 0$. En part, $P_{12} \neq 0$.
2. Si B ou F est non elliptique
   $\exists n_i \to +\infty$ tq $P_{n_i} \to +\infty$
3. Si B et F sont elliptiques $4K \equiv 0$ ou $6K \equiv 0 \Rightarrow 12K \equiv 0$.

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 3) : sur $B \times F$, $K_{B\times F} = 0$

Si $D \in |4K|$ sur $(B\times F)/G$ alors $\pi^* D = 0$, donc $D = 0$

$(P_4 \neq 0)$

$$\left(C \subseteq B \times F \Rightarrow 0 = \pi^* D \cdot C = D \cdot \pi_* C\right) \Rightarrow D \equiv 0$$

$\Rightarrow 4K \equiv 0$.

Cas I : $\tilde{S} = B \times F$

Biellitique

$$H^0(S, (\Omega_S^2)^{\otimes K}) = H^0(\tilde{S}, (\Omega_S^2)^{\otimes K})^G = (\underbrace{H^0(B, \omega_B^{\otimes K})}_{\text{dim } 1} \otimes H^0(F, \omega_F^{\otimes K}))^G$$

$$P_K(S) = h^0(F, \omega_F^{\otimes K})^G = h^0(\underset{\mathbb{P}^1}{\overset{}{F/G}}, L_K)$$

($F/G \simeq \mathbb{P}^1$)

$$L_K = \omega_{F/G}^{\otimes K}\left(\sum_{p \in F/G} p \cdot \left[K\left(1 - \frac{1}{e_p}\right)\right]\right)$$

$$\deg L_K = -2K + \sum_p \left[K\left(1 - \frac{1}{e_p}\right)\right]$$

Riemann-Hurwitz : $2g(F) - 2 = -2n + \sum_p n\left(1 - \frac{1}{e_p}\right)$

si r : nb de pts de ramification.

$$\deg(L_K) \geq K\,\frac{2g(F)-2}{n} - r$$

si $g(F) \geq 2$: $P_K(S) = \sup(\deg(L_K) + 1, 0) \xrightarrow[K \to +\infty]{} +\infty$.

$\uparrow$ RR

Sinon : $e_1 \leq \ldots \leq e_r$

$$\sum\left(1 - \frac{1}{e_i}\right) \geq 2$$

Mq : si $4|K$ ou $6|K$ alors $\deg L_K \geq 0$.

si $r \geq 4$: $\deg L_2 \geq 2$

RH : $r \geq 3$

$r = 3$: $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} \leq 1$

si $e_1 \geq 3$: $\deg L_3 \geq 0$

si $e_1 = 2$: $\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} \leq \frac{1}{2}$

$e_2 \geq 4$: $\deg L_K \geq 0$

$e_2 = 3$: $e_3 \geq 6$ $\deg L_6 \geq 0$.

Cas II : F elliptique

Rappel : Automorphisme de F = transl. $\circ$ aut. de group.

Aut de groupe de F : $x \mapsto -x$

Sauf $F_i = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i)$ $\quad x \mapsto \pm ix$

$F_\rho = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\rho)$ $\qquad \rho^3 = 1$

$x \mapsto \pm \rho x$
$x \mapsto \pm \rho^2 x$ $\quad$ ordre 6.

$S = (B \times F)/G \quad , F \neq F_i, F_\rho$

$$H^0(S, (\Omega_S^2)^{\otimes K}) = [H^0(B, \omega_B^{\otimes K}) \otimes \underbrace{H^0(F, \omega_F^{\otimes K})}]^G$$

Si ω holomorphe $\neq 0$ sur F (resp. F_i, F_ρ) $\quad$ dim 1

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\omega^{\otimes 2}$ invar. par $\mathrm{Aut}(F)$

resp. $\omega^{\otimes 4}$ " $\mathrm{Aut}(F_i)$

$\omega^{\otimes 6}$ " $\mathrm{Aut}(F_\rho)$

Si $2|K$ resp. $4|K$ resp $6|K$

$$P_K(S) = \dim H^0(B, \omega_B^{\otimes K})^G = \dim H^0\left(B/G, \omega_{B/G}^{\otimes K} \otimes \sum_p p \cdot \left[K\left(1 - \frac{1}{e_p}\right)\right]\right)$$

Si $g(B) \geq 2$, $P_K \nearrow +\infty$ si $K \to +\infty$ K div par 2, 4 ou 6.

$(\deg(\omega_{B/G}^{\otimes K}) = 0 \;+\; RR)$

__Corollaire__ (Enriques) : S surface tq $P_4 = P_6 = 0$. (ou $P_{12} = 0$), alors S est réglée.

__Corollaire__ : Si S surface. Sont équiv.

1) S est reglée
2) $\exists\, C \subseteq S$ non-exceptionnelle tq $C \cdot K_S < 0$.
3) $\forall D$ diviseur $|D + nK_S| = \phi$ si $n \gg 0$.
4) $P_n = 0 \quad \forall n$
5) $P_{12} = 0$.

Démo :

2) ⇒ 3) : Formule du genre ⇒ $C^2 \geq 0$

$(D + nK_S) \cdot C < 0$ si $n >> 0$ rmq utile !

3) ⇒ 4) : $D = 0$

1) ⇒ 2) : $\exists f : S \to M$ birat.

où M géom. réglée ou $\mathbb{P}^2$

$\exists F$ fibre de M (resp. droite L de $\mathbb{P}^2$)

Au dessus de laquelle f isom.

$f^*F \cdot K_S = F \cdot K_M = -2$ resp. $f^*L \cdot K_S = L \cdot K_{\mathbb{P}^2} = -3$. ∎

Étude du cas $S = (E \times F)/G$, E, F elliptiques $12K \equiv 0$.

Surfaces <u>biellip</u>tiques : classification !

G : gp fini de transl. de E opérant sur F, tq F/G rationnelle

$G = T \rtimes A$ T : trans.
A : automorphisme de F

F/G rat ⇒ $A \neq 0$.

donc $A = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$, $a = 2, 3, 4, 6$.

G gp de translations ⇒ produit est direct.

⇒ éléments de T sont fixes par A.

⇒ $T \times A$ engendré par 2 éléments.