Exposé 9 : La dimension de Kodaira

V variété proj. lisse

$\kappa(V) = \sup_{n \geq 1} \dim \mathrm{Im}(\varphi_{|nK|} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^{h^0(nK)-1})$

Si $\forall n,\ h^0(nK) = 0$, $\kappa(V) = -\infty$.

Invariant birationnel

•) $\kappa(V \times W) = \kappa(V) * \kappa(W)$

•) $f : V \to W$ surjectif $\quad \kappa(W) \leq \kappa(V)$

S est réglée $\Leftrightarrow \kappa(S) = -\infty \Leftrightarrow \forall n\ P_n = 0$

$\kappa(S) = 0 \Leftrightarrow \forall n\ P_n = 0$ ou 1 et $\exists n\ P_n = 1$.

Exemple : Si $S_{d_1,\dots,d_r}$ intersection de r hypersurfaces de $\mathbb{P}^{r+2}$ de degrés $d_1,\dots,d_r$

Alors :

- $S_2, S_3, S_{2,2}$ rationnelles : $\kappa = -\infty$
- $S_4, S_{2,3}, S_{2,2,2}$ $\quad \kappa = 0$ et $K_S = 0$
- Autres $\quad \kappa = 2$

Démo : $K_S = kH$, $k = (\sum d_i) - r - 3$

Si $k < 0$

Si $k = 0$: $K_S \equiv 0$

Autres cas K_S ample $\Rightarrow \kappa = 2$.

Rmq : Si $\exists n$ tq $nK_S = 0 \Rightarrow \kappa = 0$.

Ex : Surfaces bielliptiques $(12K_S \equiv 0)$.

Surfaces avec $\kappa = 0$:

Si $\kappa \geq 0$ on se restreint aux surfaces minimales.

On a, $\forall D$ effectif $K_S \cdot D \geq 0$:

Si C courbe irred tq $C.K_S < 0$

genre $\Rightarrow C^2 \geq 0$

$C.nK < 0 \ \forall n$, donc $|nK_S| = \phi \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \kappa = -\infty$.

(Rmq utile avec C et $E \in |nK_S|$) ∎

Lemme : Si S minimale tq $\kappa = 0$ alors

a) $K_S^2 = 0$

b) $\chi(\mathcal{O}_S) \geq 0$

c) si n, m entiers et $d = \operatorname{pgcd}(n,m)$

$P_n = 1 = P_m \Rightarrow P_d = 1$

Démo :

a) $\exists m$ tq $\exists D \in |mK|$

$D.K \geq 0$, $D \equiv mK \Rightarrow mK^2 \geq 0 \Rightarrow K^2 \geq 0$.

Si $K^2 > 0$: RR implique

$h^0(nK) + h^0((1-n)K) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(n^2-n)K^2$

$n \geq 2$: si $E \in |(1-n)K|$

$E.K \geq 0$ donc on deduit $K^2 \leq 0$

$\Rightarrow h^0((1-n)K) = 0$

On a $h^0(nK) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ contradit $\kappa = 0$

$\Rightarrow K^2 = 0$.

b) Noether pour $K^2 = 0$: $12\chi(\mathcal{O}_S) = \chi_{top}(S) = 2 - 4q + b_2$

$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g$

$8\chi(\mathcal{O}_S) = 12\chi(\mathcal{O}_S) - 4\chi(\mathcal{O}_S) = -2 - 4p_g + b_2$

$8\chi(\mathcal{O}_S) \geq -2 - 4p_g \geq -6$ car $p_g \leq 1 \Rightarrow \chi(\mathcal{O}_S) \geq -\frac{3}{4} \Rightarrow \chi(\mathcal{O}_S) \geq 0$.

c) $D \in |nK|$, $E \in |mK|$

$n = dn'$, $m = dm'$

$m'D$, $n'E \in |\frac{nm}{d}K|$ dim proj. 0

$\Rightarrow \exists \Delta$ effectif tq $D = n'\Delta$, $E = m'\Delta$

$\mathcal{E}$: classe dans $\mathrm{Pic}(S)$ de $\Delta - dK$

$n'\mathcal{E} = n'\Delta - n'dK = 0$, $m'\mathcal{E} = 0$

D'où $\mathcal{E} = 0$ car $\mathrm{pgcd}(n', m') = 1$. $\Rightarrow \Delta \in |dK|$ et donc $P_d = 1$ ∎

<u>Théorème</u> : Si S surface minimale avec $\kappa = 0$, alors $\exists 4$ cas :

1) $p_g = 0$, $q = 0$ alors $2K \equiv 0$ (surface d'Enriques)

2) $p_g = 0$, $q = 1$ (surfaces bielliptiques)

3) $p_g = 1$, $q = 0$, $K \equiv 0$ (surfaces K3)

4) $p_g = 1$, $q = 2$ (surfaces abéliennes)

<u>Démo</u> : $p_g \leq 1$. <u>Si $p_g = 0$</u> :

<u>Si $q = 0$</u> alors $P_2 = 1$ (sinon, Castelnuovo $\Rightarrow$ S rationnelle $\Rightarrow \kappa = -\infty$)

$K^2 = 0$.

Riemann-Roch :

$h^0(-2K) + h^0(3K) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}((-2K)^2 - (-2K)\cdot K)$

$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g = 1$

$p_g = 0$ et $P_2 = 1 \Rightarrow P_3 = 0$

donc $h^0(-2K) \geq 1$ et $P_2 = h^0(2K) = 1 \Rightarrow 2K \equiv 0$.

<u>Si $q \geq 1$</u> (cf Ch IV) :

<u>Si $p_g = 1$</u> : $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g \geq 0$ et donc $q = 0, 1, 2$.

Si $q = 0$: RR : $h^0(-K) + h^0(2K) \geq 2 = \chi(\mathcal{O}_S)$

$h^0(2K) = P_2 = 1$ donc $h^0(-K) \geq 1$ et $p_g = h^0(K) = 1$

$\Rightarrow K \equiv 0$.

Si $q=1$: $\exists$ diviseur ε tq $\varepsilon \not\equiv 0$, $2\varepsilon \equiv 0$.

$\Rightarrow \varepsilon . D = 0 \quad \forall D$ effectif.

$h^0(\varepsilon) = 0$, $h^0(-\varepsilon) = 0$

RR : $h^0(\varepsilon) + h^0(K-\varepsilon) \geq 1 = \chi(\mathcal{O}_S)$

donc $h^0(K-\varepsilon) \geq 1$. Soit $D \in |K-\varepsilon|$, $K_0 \in |K|$

$2D \in |2K|$ donc $2D = 2K_0$ donc $D = K_0$ contredit $\varepsilon \not\equiv 0$.

donc $\nexists$ surface avec $p_g = P_2 = q = 1$ et $K = 0$.

Prop : S surface. C_i courbes irréductibles sur S.

$m_i > 0$, $F = \sum m_i C_i$ tq $F \cdot C_i \leq 0 \quad \forall i$

Soit $D = \sum r_i C_i$, $r_i \in \mathbb{Z}$, $D \neq 0$

Alors $D^2 \leq 0$. Si F connexe : si $D^2 = 0$ alors $D = rF$, $r \in \mathbb{Q}$

et $F \cdot C_i = 0 \quad \forall i$

Corollaire VIII.4 : Si S surface, B courbe lisse, $p : S \to B$ surjectif à fibres connexes.

$F_b = \sum m_i F_i$ fibre, $D = \sum r_i F_i$, $r_i \in \mathbb{Z}$

alors $D^2 \leq 0$ égalité $\Leftrightarrow D = rF_b$ $r \in \mathbb{Q}$

Démo : On a $F_i \cdot F = 0$ ☒

Corollaire VIII.5 : S surface, S' surface proj pas forc. lisse,

$g : S \to S'$ surjectif, $p \in S'$, C_i courbes irréd tq $g(C_i) = \{p\}$.

$D = \sum r_i C_i$ $r_i \in \mathbb{Z}$ alors $D^2 \leq 0$.

Démo : Supposons $\bigcup C_i$ connexe.

On suppose g à fibres connexes (Stein)

$g^{-1}(p) = \bigcup C'_i$, $\{C_i\} \subset \{C'_i\}$

Soit H section hyp. de S' qui passe par p

$g^* H = \tilde{H} + \sum m_i C'_i$. On pose $F = g^* H - \tilde{H}$

$g^* H \cdot C'_i \leq 0$, donc $F \cdot C'_i \leq 0$ et $\exists i$ tq $F \cdot C'_i < 0$ ☒

Retour au dernier cas :

$\kappa = 0$, $p_g = 1$, $q = 2$.

$K \in |K_S|$

si $K \not\equiv 0$, $K = \sum n_i C_i$, $n_i > 0$, C_i irred

$K^2 = 0$, $K . C_i \geqslant 0$

$\Rightarrow 0 = K^2 = K \cdot \left(\sum n_i C_i \right) \geqslant 0 \Rightarrow K \cdot C_i = 0 \ \forall i$

$n_i C_i^2 + \sum_{j \neq i} n_j \underbrace{(C_j \cdot C_i)}_{\geqslant 0} = 0$, donc :

·) Soit $C_i^2 < 0$

Genre : $g(C_i) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C_i K)$

$C_i^2 = -2$ et $C \simeq \mathbb{P}^1$

·) Soit $C_i^2 = 0$ et $\forall j \neq i$ $C_i C_j = 0$

Genre : C_i elliptique

ou : rationnelle à point double.

et C_i est une composante connexe de $\bigcup_j C_j$

On réécrit $K = \sum D_\alpha$, D_α connexe $D_\alpha D_\beta = 0$ si $\alpha \neq \beta$, $D_\alpha^2 = 0$

$\Rightarrow D_\alpha$ multiple de courbe elliptique ou rat. à pt double

ou bien union de courbes rationnelles lisses.

$\alpha : S \to \mathrm{Alb}(S)$

β) si $\alpha(S)$ courbe et $K \not\equiv 0 \Rightarrow \alpha(S) = B$ lisse de genre $2 = q$.

∄ morphisme surjectif genre 0 ou 1 → genre 2

donc les $D_\alpha \subseteq$ fibres F_b de $p : S \to B$

or $D^2 = 0$

Corollaire VIII.4 : $D = \frac{m}{q} F \Rightarrow r q D = r m F_b = p^*(rm[b])$

$h^0(nK) \geqslant h^0(nD)$

et $h^0(nD) \longrightarrow +\infty$ donc $h^0(nK) \to +\infty$ contredit $\kappa = 0$.

γ) $\alpha(S)$ courbe de genre 2 et $K \equiv 0$.

$B' \to B$ revêtement étale connexe de degré ≥ 2.

$S' = S \times_B B'$ connexe

$K_{S'} \equiv \pi^* K_S \equiv 0$, $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = n\chi(\mathcal{O}_S) = 0$

$\Rightarrow p_g(S') = p_g(S) \Rightarrow q(S') = 2$.

Par ailleurs $q(S') = g(B') \geq 3$ contradiction.

δ) α surjective et $K \not\equiv 0$.

Si D comp. connexe de K : $D^2 = 0$

Corollaire VIII.5 $\Rightarrow \alpha(D) \neq \{pt\}$

Donc $D \neq$ union de courbes rationnelles, donc $D = nE$, E elliptique lisse.

$\alpha(E) = E' \subseteq \mathrm{Alb}(S)$ courbe elliptique lisse

E' sous-variété abélienne.

$F = A/E'$ courbe.

$f : S \to F$ surjectif ; $S \xrightarrow{g} B \xrightarrow[\text{fini}]{} F$ factorisation de Stein

$\uparrow$ surjectif à fibres connexes.

$E \subseteq$ fibre de g : F_b. Corollaire : $E = \frac{1}{q} F_b$

Même argument, $h^0(mK) \geq h^0(mE) \to +\infty$ car $h^0(m[b]) \to +\infty$.

E comp. connexe de K $\lightning$

Dernier cas :

α surjectif, $K \equiv 0$.

$\{\eta_1, \eta_2\}$ base de $H^0(A, \Omega^1_A)$

$\omega_1 = \alpha^* \eta_1$, $\omega_2 = \alpha^* \eta_2$

α est étale en $x \iff (\omega_1 \wedge \omega_2)(x) \neq 0$

Or α génériquement étale , $\omega_1 \wedge \omega_2 \not\equiv 0$

or $K \equiv 0 \Rightarrow \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ partout , donc α étale. $\blacksquare$

<u>Corollaire</u> : Si S surface minimale avec $\kappa = 0$ alors $4K \equiv 0$ ou $6K \equiv 0$.