Exposé 10 : "Surfaces K3 et surfaces d'Enriques"

I) Surfaces K3 :

S surface est K3 si $K_S \equiv 0$ et $q = 0$.

En particulier : S minimale (pas de (-1)-courbes), $p_g = 1$ et $\kappa(S) = 0$.

Noether : $\chi_{top}(S) = 24 \Rightarrow b_2(S) = 22$.

Exemple : Intersections complètes $S_4 \subseteq \mathbb{P}^3$, $S_{2,3} \subseteq \mathbb{P}^4$, $S_{2,2,2} \subseteq \mathbb{P}^5$ satisfont $K_S = 0$; de plus $q = 0$: $\deg 4 = 2\cdot 3 - 2$, $\deg 6 = 2\cdot 4 - 2$, $\deg 8 = 2\cdot 5 - 2$

Rmq : $V^d \subseteq \mathbb{P}^n$ intersection complète $\Rightarrow h^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ pour $0 < i < d$.

Exemple (Surfaces de Kummer) :

Soit A ~~variété~~ surface abélienne et $0 \in A$ origine. Soit $\tau : A \to A$, $a \mapsto -a$

$\Rightarrow$ 16 pts d'ordre 2 : $p_1, \dots, p_{16} \in A$.

Soit $\varepsilon : \hat{A} \to A$ l'éclatement de ces pts et soient $E_i = \varepsilon^{-1}(p_i)$ les diviseurs exceptionnels.

τ s'étend à une involution $\sigma : \hat{A} \to \hat{A}$. Soit $X = \hat{A} / \langle\sigma\rangle$ et soit $\pi : \hat{A} \to X$ la projection.

Prop : $X = \hat{A}/\langle\sigma\rangle$ est une surface K3 ; la "surface de Kummer" de A.

Preuve : •) M.q. X est lisse :

π étale en dehors des E_i. Considérons $\pi(q)$, où $q \in E_i$.

Écrivons $A = V/\Gamma$ et (x,y) coord. locales en p_i tq $\tau^* x = -x$, $\tau^* y = -y$

Soient $x' = \varepsilon^* x$ et $y' = \varepsilon^* y$.

On peut supposer que x' et $t = y'/x'$ sont coord. locales en $q \in \hat{A}$.

$\Rightarrow \sigma^* x = -x$ et $\sigma^* t = (-y')/(-x') = t$

Ainsi, t et $u = x'^2$ sont coord locales en $\pi(q) \in X \Rightarrow X$ lisse ✓

•) M.q. $K_X \equiv 0$: x, y coord en $A \to \omega = dx \wedge dy$ 2-forme holo. sans zeroes.

$\tau^* \omega = \omega \Rightarrow \varepsilon^* \omega$ σ-invariante

$\Rightarrow \varepsilon^* \omega = \pi^* \alpha$, où α 2-forme méromorphe en X.

Soit $q \in E_i$, ~~...~~ alors

$$\varepsilon^* \omega = dx' \wedge dy' = dx' \wedge d(tx') = x' dx' \wedge dt = \frac{1}{2} du \wedge dt$$

$\Rightarrow \alpha$ forme holo sans zeros en $q \Rightarrow K_X \equiv 0$ ✓

M.q $q = 0$: Sinon $\hat{A}$ admet une 1-forme σ-invariante.

Mais, $\varepsilon^* : H^0(A, \Omega_A^1) \xrightarrow{\simeq} H^0(\hat{A}, \Omega_{\hat{A}}^1)$ isom. (q inv. birat)

$\Rightarrow A$ admet une 1-forme τ-invariante, contradiction. ■

<u>Prop</u>: Soit S surface K3 et $C \subseteq S$ courbe lisse de genre g.

Alors,

1) $C^2 = 2g-2$ et $h^0(C) = g+1$.

<u>Démo 1)</u>: $g = g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + \cancel{C \cdot K}) \Rightarrow C^2 = 2g-2$.

RR : $\chi(C) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(C^2 - C \cdot K) = 2 + \frac{1}{2}C^2 = g+1$

$\chi(C) = h^0(C) - h^1(C) + h^2(C)$, mais $h^2(C) = h^0(-C) = 0$.

$\Rightarrow h^0(C) \geqslant g+1$. D'autre part, $\mathcal{O}_S(K+C)|_C \simeq \mathcal{O}_S(C)|_C \simeq \omega_C$

$\Rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \simeq H^0(C, \omega_C)$.

Ainsi, $0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(C) \to \mathcal{O}_S(C)|_C \to 0$ implique

$0 \to H^0(\mathcal{O}_S) \to H^0(\mathcal{O}_S(C)) \to H^0(\mathcal{O}_C(C))$

$\Rightarrow h^0(C) \leq h^0(\mathcal{O}_S) + h^0(\omega_C) = g+1$ ■

<u>Rmq</u>: $H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) \twoheadrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(C))$ surjectif.

2) Si $g \geqslant 1$, $|C|$ sans pts de base et donc il définit $\phi : S \to \mathbb{P}^g$; la restriction $\phi|_C : C \to \mathbb{P}^{g-1}$ est défini par $|\omega_C|$.

<u>Démo 2)</u>: $H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) \twoheadrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \simeq H^0(C, \omega_C)$ induit un plongement $\mathbb{P}^{g-1} \simeq \mathbb{P}(H^0(C, \omega_C)) \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) \simeq \mathbb{P}^g$

$|C|$ n'a pas pts de base en dehors de C et $|\omega_C|$ est sans pts de base si $g \geqslant 1$ $\Rightarrow |C|$ sans pts de base si $g \geqslant 1$. ■

3) Si $g=2$, $\phi : S \to \mathbb{P}^2$ morphisme de degré 2 avec lieu de branchement de degré 6 dans $\mathbb{P}^2$.

Démo 3) : $g=2 \Rightarrow C^2 = 2 \Rightarrow \deg \phi = 2$.

Soit $\Delta \subseteq \mathbb{P}^2$ lieu de branchement, $\deg \Delta = n$.

$C = \phi^{-1}(\ell)$, $\ell = \phi(C) \subseteq \mathbb{P}^2$ droite

$\Rightarrow C \to \ell$ revêtement de deg 2 branché le long n pts dans $\ell \cap \Delta$

$g(C) = 2$ + Riemann-Hurwitz $\Rightarrow n = 6$. ∎

4) Supposons $g \geq 3$, alors

a) Soit ϕ birationnel, une courbe gén. dans $|C|$ est non-hyperelliptique

b) Soit ϕ est 2-1 dont l'image est une surface (singulière) rationnelle de degré $g-1 \subseteq \mathbb{P}^g$. Une courbe gén. dans $|C|$ est ~~non~~ hyperelliptique.

Démo 4) : [Rmq : Si $g(C) \geq 2$, C lisse irred. Alors ω_C très ample $\Leftrightarrow$ C est non-hyperelliptique.

Si C non-hyperellip. $\Rightarrow \phi|_C$ plongement

$\phi^{-1}(\phi(C)) = C \Rightarrow$ génériquement de degré 1 $\Rightarrow \phi$ birat $\rightsquigarrow$ a)

Si ϕ n'est pas birat $\Rightarrow$ toute courbe lisse dans $|C|$ est hyperelliptique. Pour $x \in S$ générique, $\phi^{-1}(\phi(x))$ est un ensemble de 2 pts $\Rightarrow \deg \phi = 2$.

$C^2 = 2g-2$ et $\deg \phi = 2 \Rightarrow \deg \phi(S) = g-1$ dans $\mathbb{P}^g$.

$\phi(C)$ courbes rat (sections hyperplans de $\Sigma = \phi(S)$) $\Rightarrow \Sigma$ rat. ∎

5) Si $g \geq 3$ (resp. $g=2$), alors $\phi_{|2C|}$ (resp. $\phi_{|3C|}$) est birat.

Démo 5) : $\deg(2C) = \deg(2\omega_C) = 4g-4 \geq 2g+1$ si $g \geq 3 \Rightarrow |2C|$ très ample

$\deg(3C) = \deg(3\omega_C) = 6g-6 = 6 \geq 2g+1 = 5$ si $g=2 \Rightarrow |3C|$ très ample ∎

On a vu : $\exists$ K3 de deg $2g-2$ dans $\mathbb{P}^g$ pour $g = 3,4,5$.

Prop : $\forall g \geq 3$, $\exists$ surface K3 $S = S_{2g-2} \subseteq \mathbb{P}^g$ de degré $2g-2$.

Idée : Construire une surface K3 S avec $D \in \mathrm{Pic}(S)$ très ample tq $D^2 = 2g-2$.

Rmq : Si H section hyperplane (très ample par déf) et $|E|$ sans pts de base $\Rightarrow H+E$ très ample.

3 cas : a) $g = 3k$, $k \geq 1$
b) $g = 3k+1$, $k \geq 1$
c) $g = 3k+2$, $k \geq 2$

Voyons $g = 3k$: Soit $S \subseteq \mathbb{P}^3$ quartique contenant une droite ℓ
(e.g. $(x_0^4+x_1^4+x_2^4+x_3^4 = 0)$: $S \supseteq \ell_\xi = ([a:\xi a : b : \xi b], [a;b] \in \mathbb{P}^1)$, $\xi^4 = -1$)

Considérons $|H-\ell|$: plans contenant ℓ $\rightsquigarrow$ pinceau de courbes elliptiques $|E|$

(e.g. $(x_0^2+\xi^2x_1^2)(x_0^2-\xi^2x_1^2) + (x_2^2+\xi^2x_3^2)(x_2^2-\xi^2x_3^2) = 0$
$\rightsquigarrow$ Fibration elliptique : $S \to \mathbb{P}^1$, $[x_0:x_1:x_2:x_3] \mapsto [x_0^2+\xi^2x_1^2 : x_2^2-\xi^2x_3^2]$)

Alors, $D_k = H + (k-1)E$ très ample ($|E|$ sans pt de base)

$\Rightarrow D_k^2 = H^2 + (k-1)H\cdot E$
$= 4 + 6(k-1) = 6k-2 = 2g-2$ ∎

(II) Surfaces d'Enriques : S surface d'Enriques si S minimale avec $\kappa(S) = 0$, $p_g = 0$ et $q = 0$ $\Rightarrow 2K_S \equiv 0$, $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$

Rappel : X variété, $L \in \mathrm{Pic}(X)$ d'ordre 2 (ie, $\alpha : L^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$) correspond à un revêtement étale d'ordre 2 $\pi : \tilde{X} \to X$, caractérisé par la propriété $\pi^* L \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}$.

Explicitement : si on pense L comme fibré en droites :

$$\tilde{X} = \{ u \in L \mid \alpha(u^{\otimes 2}) = 1 \} \xrightarrow{\pi = pr_X} X$$

$u \in \tilde{X} \subset L \mapsto (u,u) \in \tilde{X} \times_X L = \pi^* L$ section sans zéros de $\pi^* L$

$\Rightarrow \pi^* L \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}$

Prop: Soit S surface d'Enriques, et $\pi : \tilde{S} \to S$ le rev. double corresp. à $\mathcal{O}_S(K_S)$. Alors $\tilde{S}$ est une surface K3.
Réciproquement, le quotient d'une surface K3 par une involution sans pts fixes est une surface d'Enriques.

Démo: $K_{\tilde{S}} = \pi^* \cancel{K}_S = 0$ par déf de π.

$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = 2\chi(\mathcal{O}_S) = 2 \Rightarrow q(\tilde{S}) = 0$ et donc $\tilde{S}$ est K3.

Réciproquement, soit $\pi : \tilde{S} \to S$ étale d'ordre 2, avec $\tilde{S}$ surface K3.

$$\pi^* K_S \underset{\substack{\uparrow \\ \pi \text{ étale}}}{=} K_{\tilde{S}} \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{S}\ K3}}{=} 0 \Rightarrow 2K_S = \pi_* \pi^* K_S = 0$$

De plus, $\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{2}\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = 1 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $p_g(S) = q(S)$

D'après la classification de surfaces minimales avec $\kappa(S) = 0$
$\Rightarrow S$ est une surface d'Enriques ∎

Exemple: Soit $X = q_1 \cap q_2 \cap q_3 \subseteq \mathbb{P}^5$ intersection complète,
où $q_i \doteq (Q_i(x_0, x_1, x_2) + Q_i'(x_3, x_4, x_5) = 0)$ $i = 1, 2, 3$

dont Q_i, Q_i' quadriques.
Si Q_i, Q_i' génériques $\Rightarrow X$ est lisse K3.

Soit $\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_0, x_1, x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$

Pts fixes de σ : $\Pi_1 = (x_0 = x_1 = x_2 = 0) \cup \Pi_2 = (x_3 = x_4 = x_5 = 0)$

Pour Q_1, Q_2, Q_3 génériques, elles n'ont pas de pts en commun dans Π_1;
pareil pour Q_1', Q_2', Q_3'
$\Rightarrow \sigma$ agit ~~[illegible]~~ sans pts fixes sur X $\Rightarrow X/\sigma$ surface d'Enriques ✓