

Exposé 11: "Surfaces avec  $K=1, K=2$  et surfaces elliptiques"

Lemme:  $\Delta$   $S$  surface minimale non réglée (rappel  $\Rightarrow K_S^2 \geq 0$ )

a)  $\Delta$   $K_S^2 > 0 \exists n_0$  tq  $\varphi_{nK}$  application birationnelle de  $S$  sur son image  $\forall n \geq n_0$

b)  $\Delta$   $K_S^2 = 0$  et  $\exists r$  tq  $P_r \geq 2$ , on écrit  $rK \equiv Z + M$ ;  $M$ : mobile

Alors,  $K \cdot Z = K \cdot M = Z^2 = Z \cdot M = M^2 = 0$ .

$Z$ : fixe

Démo: a)  $H$  section hyperplane

RR à  $D = nK + H$ :

$$h^0(nK - H) + h^0(H + (1-n)K) \geq \chi(O_S) + \frac{1}{2} (D^2 - D \cdot K) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\underbrace{n^2 K^2 + H^2 - 2n K \cdot H - n K^2 + H \cdot K}_{> 0}$$

$S$  non-réglée  $\Rightarrow K_S \cdot H > 0$  ( $K_S \cdot D \geq 0 \forall D$  effectif  $\approx S$  minimale  $K \geq 0$ )

$(H + (1-n)K) \cdot H < 0 \quad n \gg 0$

$\exists n_0$  tq  $h^0(nK - H) \geq 1 \quad \forall n \geq n_0$

Soit  $E \in |nK - H|$

$|nK| = |H + E|$

$\varphi_{nK} |_{S/E}$  plongement

b) Calcul.  $\square$

Proposition:  $\Delta$   $S$  surface minimale avec  $K=1$

a)  $K_S^2 = 0$

b)  $\exists B$  courbe lisse et  $p: S \rightarrow B$  surjectif tq fibre générale est une courbe elliptique (Ceci: "surface elliptique").

Démo: a)  $K=1 \Rightarrow S$  non-réglée  $\Rightarrow K_S^2 \geq 0$

Lemme: non ( $K_S^2 > 0$ )

$\Rightarrow K_S^2 = 0$

$\hookrightarrow$  ~~surface minimale~~  $S$  minimale +  $K \ll 1$   
 $\hookrightarrow$  géométriquement réglée  $\Rightarrow$  réglée.

b)  $K=1$  donc  $\exists r$  tq  $P_r \geq 2$

$rK = Z + M$ ,  $M^2 = K \cdot M = 0$  (par de pts de base!)  $\hookrightarrow$  sinon  $M^2 > 0$

$|M|$ : morphisme  $f: S \rightarrow \mathbb{P}^N$

tg image = courbe ( $K=1$ )

Factorisation de Stein:  $f: S \rightarrow B \xrightarrow{f_{ini}} C \subseteq \mathbb{P}^N$   
fibres connexes

$\Delta$ : F fibre de  $\varphi$

M: somme de fibres de  $\varphi$ ,  $K \cdot M = 0 \Rightarrow K \cdot F = 0$

$$g(F) = 1 + \frac{1}{2}(K^2 + K \cdot F) = 1 \quad \square$$

Ex:  $E \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ ,  $K = -\infty$

Surfaces bielliptiques  $(E \times F)/G$ ,  $E, F$  elliptiques

$G$  groupe de translations de  $E \cong F$  tg

$(E \times F)/G$   $K = 0$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 $E/G \quad F/G$

Surface abélienne  $A$  est elliptique

$\Leftrightarrow \exists 0 \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow 0$  où  $E, F$  elliptiques

Surfaces de type général  $K=2$

Prop:  $\Delta$ :  $S$  minimale, équivalence:

a)  $K=2$

b)  $K_S^2 > 0$  et  $S$  non rationnelle

c)  $\exists m_0$  tg  $\varphi_{mk}$  est birationnelle  $S \dashrightarrow \varphi_{mk}(S) \quad \forall m \geq m_0$

Demo:

$c \Rightarrow a$  par def.

$a \Rightarrow b$ :  $\Delta$ :  $S$  rationnelle  $\Rightarrow K = -\infty$

$\Delta$ :  $K_S^2 \leq 0$ :  $\Delta$ :  $K_S^2 < 0$   $S$  réglée  $K = -\infty$

$\Delta$ :  $K_S^2 = 0$  et  $\exists m$  tg  $\varphi_m \geq 2$

alors (...)  $nK \equiv Z + M$ ,  $M^2 = 0$

donc  $K_S^2 = 0$  et  $\forall m \varphi_m \leq 1$

b  $\Rightarrow$  c : Il suffit de voir que S non réglée

or :  $\exists$  S réglée + minimale  $\Rightarrow$  S géom. réglée / C

$$K_S^2 = 8(1-g(C)) \leq 0 \text{ sauf si } g(C) = 0 \Leftrightarrow S \text{ rationnelle}$$

Exemples :

- Intersection complètes sauf les déjà vus

- Produit de courbes de genre  $\geq 2$ .

$\exists$   $f: S' \rightarrow S$  surjectif et S de type général  $\Rightarrow S'$  type général

$$K(S) \leq K(S')$$

Exemples de Godeaux

$$(g=0 \neq p_g=0)$$

$$S' \subseteq \mathbb{P}^3 : X^5 + Y^5 + Z^5 + T^5 = 0$$

$$\sigma \text{ automorphisme } \sigma(x, y, z, t) = (x, \xi y, \xi^2 z, \xi^3 t)$$

$$\xi^5 = 1 \text{ primitive}$$

$$S = S' / \langle \sigma \rangle \text{ lisse}$$

$$g(S') = 0 \text{ donc } g(S) = 0$$

$$K_{S'} = (5-3-1)H = H \neq K_S^2 = 5$$

$$p_g(S') = 4 \Rightarrow \chi(\mathcal{O}_{S'}) = 1 - g + p_g = 5$$

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{5} \chi(\mathcal{O}_{S'}) = 1 \Rightarrow p_g(S) = 0$$

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header, which is mostly illegible due to fading and bleed-through.

Second line of handwritten text, appearing to be the start of a paragraph or section.

Third line of handwritten text, continuing the content from the previous lines.

Fourth line of handwritten text, showing some structural elements like a list or numbered points.

Fifth line of handwritten text, further down the page.

Sixth line of handwritten text, continuing the narrative or list.

Seventh line of handwritten text, showing a change in focus or a new point.

Eighth line of handwritten text, further down the page.

Ninth line of handwritten text, continuing the content.

Tenth line of handwritten text, near the bottom of the page.

Final line of handwritten text at the bottom of the page, possibly a signature or conclusion.